Ex. 1. Représenter, dans le plan réel, les points M_k d'affixes z_k pour $k = 1, \dots, 5$ avec :

$$z_1 = \sqrt{2}, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = 2 - 2i, \quad z_5 := -2 - 2i.$$

Ex. 2. Déterminer les formes algébriques de :

(a) $\dfrac{1}{1+i}$

(b) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(c) $(1+i)^4$

(d) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Ex. 3. Résoudre les équations linéaires suivantes. Vous donnerez les solutions sous forme algébrique :

(a) $z + 2i = iz - 1$

(b) $(3 + 2i)(z - 1) = i$

(c) $(2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i$

(d) $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$

Ex. 4. Déterminer l'ensemble des points M du plan réel, d'affixe z, tels que les points d'affixes z, z^2, z^4 soient alignés.

Ex. 5. On considère le nombre complexe $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Calculer z^2 puis z^3

(b) En déduire z^4, z^5 et z^6

(c) En déduire l'inverse z^{-1} de z

(d) En déduire aussi la valeur de $(1 + i\sqrt{3})^5$

(e) En déduire les valeurs des nombres complexes suivants :

$$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad \text{et} \quad (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$$

Ex. 6. Montrer que, si $z \in \mathbf{C}$ satisfait $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors $z \in \mathbf{R}$.

Ex. 7. Donner une expression simplifiée du nombre complexe $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} (1 + i)^k$.

Ex. 8. Soit $z \in \mathbf{C}$. Calculer $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kz^k$. (*Vous pourrez développer l'expression* $(1 - z)S_n$).

Ex. 9. On pose $z = 2e^{i\pi/4}$. Déterminer les formes exponentielles de z, z^{-1}, $-z$ et iz, et les représenter dans le plan réel.

Ex. 10. Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

(a) 1

(b) -1

(c) i

(d) $-i$

(e) $1 + i$

(f) $1 - i$

(g) $-1 + i\sqrt{3}$

(h) $1 + i\sqrt{3}$

Ex. 11. Utiliser les formules d'Euler pour linéariser :

(a) $\cos^3(x)$

(b) $\sin^3(x)$

(c) $\cos(3x)\sin^2(5x)$

(d) $\cos^2(x)\sin(2x) + \cos^3(3x)$

Ex. 12. Montrer que $e^{i\pi/12} = \dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Ex. 13. Déterminer la forme exponentielle de :

(a) $(1+i)^9$
(b) $(1-i)^7$
(c) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

Ex. 14. Déterminer la forme exponentielle de :

(a) $z = 1 + e^{ia}$ avec $|a| \leq \pi$
(b) $z = e^{ia} + e^{ib}$ avec $|b-a| \leq \pi$

Ex. 15. (a) Montrer que si $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} e^{i\dfrac{nx}{2}}$$

(b) En déduire les expressions de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Ex. 16. Représenter, dans le plan réel, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les relations suivantes :

(a) $|z-1| = |z-3-2i|$
(b) $|(1+i)z-2-i| = 2$
(c) $|z+3-i| \leq 2$
(d) $|z+3-i| \geq |z|$
(e) $|z| < |z+3-i| < 2$

Ex. 17. Déterminer les racines carrées de :

(a) $z = i$
(b) $z = 5 + 12i$
(c) $z = 1 + 4\sqrt{5}i$
(d) $z = 1 + i\sqrt{3}$

Ex. 18. Résoudre les équations suivantes dans le corps des nombres complexes.

(a) $z^2 - 2z + 1 = 0$
(b) $z^2 + (1+i)z + i = 0$
(c) $z^2 + 2iz + 1 = 0$
(d) $(1+i)z^2 + 2z + i = 0$

Ex. 19. Montrer que, Soient $s, p, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(a) Les nombres complexes z_1 et z_2 sont solutions de $z^2 - sz + p = 0$.
(b) On a les relations $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$.

Ex. 20. Déterminer les racines n-ièmes de z pour :

(a) $n = 3, z = 1 + i$
(b) $n = 4, z = 4i$
(c) $n = 6, z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

Ex. 21. Déterminer les invariants géométriques des similitudes suivantes :

(a) $z' = z + 3 - i$
(b) $z' = 2z + 3$
(c) $z' = iz + 1$
(d) $z' = (1-i)z + 2 + i$

Ex. 22. (a) Déterminer les invariants géométriques de $z' = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{4} z + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$
(b) Montrer que si Ω est le centre de cette similitude et $M \mapsto M'$, alors le triangle (Ω, M, M') est rectangle en M'

Ex. 23. Déterminer la forme complexe de la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k :

(a) $\Omega(1,1), \theta = \pi/2, k = 2$
(b) $\Omega(0,0), \theta = \pi/3, k = \sqrt{3}$
(c) $\Omega(1,-2), \theta = \pi/4, k = 2\sqrt{2}$

Ex. 24. Déterminer les invariants géométriques de la similitude directe :
(a) qui transforme $M(1,0)$ en $M'(1,1)$ et $N(0,2)$ en $N'(-3,-1)$
(b) qui transforme $M(5,-4)$ en $M'(-1,-4)$ et M' en $M''(-4,-1)$
(c) de centre $O(0,0)$ qui transforme $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ en $M'(-2\sqrt{3},-2)$

Ex. 25. Déterminer les formes complexes des transformations planes suivantes :

(a) Translation de vecteur $(1,-1)$
(b) Homothétie de centre $(1,-1)$ et de rapport 2
(c) Symétrie de centre $(0,0)$
(d) Symétrie de centre $(1,-1)$

Ex. 26. Construire les tables de vérité des fonctions propositionnelles suivantes.

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)$
(b) $\neg(p \wedge \neg r) \Rightarrow (q \vee r)$
(c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
(d) $(\neg p \vee q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow q)$

Ex. 27. (a) Donner une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'un entier naturel ne soit pas strictement plus grand que 10.
(b) Donner une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un entier naturel soit divisible par 6

Ex. 28. Soient f, g deux applications définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Déterminer si l'une des formules proposées ci-dessous est la contraposée de la propriété :

$$\boxed{f \geq g \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbf{R}\ f(x) \geq g(x)}$$

(a) $\exists x \in \mathbf{R}\ f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad f \geq g$
(b) $\forall x \in \mathbf{R}\ f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad f \leq g$
(c) $\forall x \in \mathbf{R}\ f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in \mathbf{R}\ f(x) \geq g(x))$
(d) $\forall x \in \mathbf{R}\ f(x) < g(x) \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in \mathbf{R}\ f(x) < g(x))$

Ex. 29. Pour chaque formule, écrire sa négation et décider si elle est vraie :

(a) $\exists n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, m \leq n$
(b) $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, m \leq n$
(c) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$
(d) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$
(e) $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$
(f) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$

Ex. 30. Montrer les propriétés suivantes à l'aide d'une preuve par contraposition :
(a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, si l'entier n^2 est pair, alors n est pair.
(b) Pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$, si $x^2 = 2$, alors x est strictement inférieur à 2.

Ex. 31. Montrer les propriétés suivantes à l'aide d'un raisonnement par l'absurde :
(a) Pour tout nombre réel strictement positif $x > 0$, il existe un nombre un nombre réel $y \in \mathbf{R}$ à la fois strictement plus petit que x et strictement positif.
(b) Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Ex. 32. Nous considérons la formule $P(n) := (2^n > n^2)$ associée à la variable n parcourant $\mathbf{N}$.
(a) Montrer que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout entier $n \geq 3$.
(b) Pour quelles valeurs de n, la formule $P(n)$ est-elle vraie ?

Ex. 33. Montrer, par récurrence sur l'entier n, que, pour tout nombre réel $x > 0$ réel, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Ex. 34. Montrer par récurrence les formules suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n+1)^2$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Ex. 35. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer les formules suivantes :

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

(c) $A \cup (B \cap A) = A$

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Ex. 36. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer les formules suivantes :

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

(b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

(c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

(d) $A \subseteq B$ et $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

(e) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

Ex. 37. Soient $A, B \subset E$ des parties d'un ensemble E. Montrer que :

(a) $A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B$

(b) $A \setminus B^c \neq \varnothing \Rightarrow A \not\subset B$

(c) $A \setminus B = A \Rightarrow B \setminus A = B$

Ex. 38. Soient $A, B, C \subset E$ des parties d'un ensemble E. Montrer :

(a) $(A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$

(b) $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Ex. 39. Soient $A, B, C \subset E$. Montrer $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$.

Ex. 40. Montrer que le disque unité de $\mathbf{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbf{R}$.

Ex. 41. Soit l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(x) = x^2$, et soit $A = [1, 4]$.

(a) Déterminer l'image directe de A par f, c'est-à-dire $f(A)$.

(b) Déterminer l'image réciproque de A par f, c'est-à-dire $f^{-1}(A)$.

Ex. 42. On considère l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(x) = x^2 - 2$.

(a) Déterminer $f([1, 1])$, $\quad f([1, 2])$

(b) Déterminer $f^{-1}([1, 1])$, $\quad f^{-1}([2, 4])$

(c) Comparer $f^{-1}(f([1, 2]))$ avec l'intervalle $[1, 2]$

(d) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

(e) Déterminer des sous-ensembles $A \subseteq \mathbf{R}$ et $B \subseteq \mathbf{R}$ tels que l'application $g_1 : A \to B, \quad g_1(x) = x^2 - 2$ soit surjective mais non injective.

(f) Déterminer des sous-ensembles $A \subseteq \mathbf{R}$ et $B \subseteq \mathbf{R}$ tels que l'application $g_2 : A \to B, \quad g_2(x) = x^2 - 2$ soit injective mais non surjective.

(g) Déterminer des ensembles $A \subseteq \mathbf{R}$ et $B \subseteq \mathbf{R}$ tels que l'application $g_3 : A \to B, \quad g_3(x) = x^2 - 2$ soit bijective.

Ex. 43. Nous considérons l'application $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $f((a, b)) = a \times b$.

(a) f est-elle injective ?
(b) f est-elle surjective ?
(c) Calculer $f((3,4))$, $f((1,8))$, $f((4,3))$
(d) Quels sont les antécédents de 0, 3 et 12 ?
(e) Déterminer $f(\{1,2\} \times \{2,3\})$
(f) Déterminer $f(\{0\} \times \mathbf{N})$
(g) Déterminer $f^{-1}(\{6\})$, $f^{-1}(\{2,8\})$

Ex. 44. Étudier injectivité, surjectivité, bijectivité des fonctions suivantes :

(a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \mapsto 2n$
(b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}_+^*$, $n \mapsto n+1$
(c) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \mapsto -n$
(d) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z^2$

Ex. 45. (a) Déterminer une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$.
(b) Déterminer une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}$.
(c) Soit $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}^*$ définie par $f(n,p) = 2^n(2p+1)$
  (i) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}^*$.
  (ii) En déduire une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}$.

Ex. 46. Soient E, F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une application.
(a) Montrer que, pour toutes parties $A, B \subseteq E$ telles que $A \subset B$, on a $f(A) \subset f(B)$.
(b) Montrer que, pour toutes parties $A, B \subseteq F$ telles que $A \subset B$, on a $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
(c) Montrer que, pour toutes parties $A, B \subseteq E$, on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Est-ce que l'égalité reste vraie si l'on remplace $\cup$ par $\cap$?
(d) Montrer que, pour toutes parties $A, B \subseteq F$, on a :

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

(e) Montrer que, pour toute partie $A \subseteq E$, on a $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Montrer que l'égalité se réalise pour toute partie $A \subseteq E$ si et seulement si f est injective.
(f) Montrer que pour toute partie $B \subseteq F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Montrer que l'égalité se réalise pour toute partie $B \subseteq F$ si et seulement si f est surjective.
(g) Montrer que, pour toutes parties $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, on a $f(A) \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}(B)$.

Ex. 47. Soient E, F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une application.
(a) Nous supposons que l'application f est injective. Montrer que pour toutes parties $A, B \subseteq E$, on a :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \text{et} \quad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

(b) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
  (i) f est injective
  (ii) $\forall A, B \subseteq E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
  (iii) $\forall A, B \subseteq E\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$
  (iv) $\forall A \subseteq E,\ f(E \setminus A) \supseteq f(E) \setminus f(A)$

Ex. 48. Soient E, F deux ensembles, $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications. Montrer que :
(a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
(b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
(c) Donner des contre-exemples montrant que les réciproques sont fausses pour un choix arbitraire d'applications f, g.
(d) En général, est-il vrai que, si $g \circ f$ est surjective, alors f surjective ?
(e) En général, est-il vrai que, si $g \circ f$ est injective, alors g injective ?

Ex. 49. Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $f^{n+1} = f \circ f^n$

(a) Montrer par récurrence que $f^{n+1} = f \circ f^n$
(b) Si f est bijective, montrer par récurrence que f^n est bijective et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$

Ex. 50. Démontrer que, pour tout nombre réel $x, y \in \mathbf{R}$ et tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, on a $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$. En déduire que l'entier 609 divise $5^{4n} - 2^{4n}$ pour tout entier naturel n.

Ex. 51. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n-2$ divise $2n+5$.

Ex. 52. Montrer les formules suivantes :
(a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, on a $11 \mid 2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.
(b) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, on a $13 \mid 2^{4n+2} + 3^{4n+2}$.
(c) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, on a $11 \mid 44^{n+2} - 3^{n+3}$
(d) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, on a $17 \mid 3 \times 5^{2n+1} + 2 \times 3^{n+1}$
(e) Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, on a $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Ex. 53. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$:
(a) $2 \mid n(n+1)$
(b) $3 \mid n(n+1)(n+2)$
(c) $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$
(d) $6 \mid 5n^3 + n$.

Ex. 54. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $40^n \cdot n! \mid (5n)!$

Ex. 55. Déterminer les entiers n tels que :
(a) $2n-3$ divisible par $n-2$
(b) $3n-7$ divisible par $n-4$

Ex. 56. Résoudre dans $\mathbf{N}$:
(a) $x^2 - y^2 = 1$
(b) $xy = x + y$
(c) $xy = 2x + 2y$
(d) $2xy = x + y$

Ex. 57. Décomposer en facteurs premiers :
(a) 46848
(b) 2379
(c) 1001
(d) 2873

Ex. 58. Calculer les décompositions en nombres premiers des couples d'entiers $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ suivants, puis en déduire les valeurs de $\text{pgcd}(a,b), \text{ppcm}(a,b)$:
(a) $a = 1254, b = 117249$.
(b) $a = 123456, b = 109310$.

Ex. 59. Calculer pgcd et ppcm pour :
(a) $(231868, 8190)$
(b) $(23145, 17)$
(c) $(12345, 678)$
(d) $(2452, 15)$

Ex. 60. Calculer le pgcd des couples d'entiers $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ suivants :
(a) $a = 3^{123} - 5, b = 25$.
(b) Pour tout entier relatif q, $a = q^2 + q, b = 2q + 1$.
(c) Pour tout entier relatif q, $a = 15q^2 + 8q + 6, b = 30q^2 + 21q + 13$.

Ex. 61. Montrer que les entiers suivants sont premiers entre eux :

(a) $8n + 7$ et $6n + 5$
(b) $2n + 3$ et $n^2 + 3n + 2$
(c) $5^{n+1} + 6^{n+1}$ et $5^n + 6^n$

Ex. 62. (a) Si $a, b \geq 2$ premiers entre eux, montrer que $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel
(b) Si $a, b \in \mathbf{Q}$ et $ab, a + b \in \mathbf{Z}$, alors $a, b \in \mathbf{Z}$

Ex. 63. (a) Si $p \mid a + b$ et $p \mid ab$, alors $p \mid a$ et $p \mid b$
(b) En déduire : si a, b premiers entre eux, alors $a + b$ et ab aussi

Ex. 64. Résoudre dans $\mathbf{N}^2$ les systèmes d'équations (en les variables x, y) suivants :
(a) $x + y = 56$ et $\text{ppcm}(x, y) = 105$.
(b) $\text{pgcd}(x, y) = 18$ et $\text{ppcm}(x, y) = 540$.
(c) $xy = 1512$ et $\text{ppcm}(x, y) = 252$.
(d) $\text{ppcm}(x, y) + 11\text{pgcd}(x, y) = 203$.

Ex. 65. Montrer que l'intervalle $[n! + 2, n! + n]$ ne contient aucun nombre premier.

Ex. 66. Montrer que pour $10 \leq n \leq 120$, n est premier ssi $\text{pgcd}(n, 210) = 1$.

Ex. 67. Soit $a, b \in \mathbf{Z}$ non nuls. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. Si $a = da'$ et $b = db'$, montrer que $\text{ppcm}(a, b) = d|a'||b'|$.

Ex. 68. Effectuer la division euclidienne de l'entier a par l'entier b dans les cas suivants.

(a) $a = 47$, $b = 6$.
(b) $a = -38$,$b = 7$.
(c) $a = 29$, $b = -4$.
(d) $a = -55$, $b = -9$.

Ex. 69. Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division de 12079233 par 75968, puis par 159.

Ex. 70. Pour $n > 0$, déterminer le reste de la division de la somme S_n des n premiers entiers naturels non nuls par n, selon la parité de n.

Ex. 71. Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de $a(n)$ par b

(a) $a(n) = 12^n$, $b = 11$
(b) $a(n) = 2^n$, $b = 5$
(c) $a(n) = 3^n$, $b = 7$
(d) $a(n) = 38^n$, $b = 7$

Ex. 72. Soient $a, b, n \geq 1$ trois entiers naturels. nous notons respectivement q, r le quotient et le reste de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Ex. 73. Pour tout entier naturel $n, m \in \mathbf{N}$, on a $7 \mid m^2 + n^2 \quad \Rightarrow \quad (7 \mid m \text{ et } 7 \mid n)$.

Ex. 74. Soit $q \in \mathbf{Z}$. Calculer les restes possibles de q^2 dans la division euclidienne par 8. En déduire que, pour tout entier impair q, l'entier $q^2 - 1$ est divisible par 8.

Ex. 75. Répondre aux questions suivantes :
(a) Déterminer, suivant les puissances de l'entier $n \in \mathbf{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
(b) Calculer le reste de la division euclidienne de 1357^{2013} par 5.

Ex. 76. Déterminer les entiers naturels $a, b \in \mathbf{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :
(a) $a < 4000$.
(b) Le quotient de la division euclidienne de a par b vaut 82 et le reste 47.

Ex. 77. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, calculer $\text{pgcd}(a, b)$ pour les couples d'entiers (a, b) suivants :

(a) $a = 135, b = 18$
(b) $a = -221, b = -782$
(c) $a = 45, b = 874$
(d) $a = 416, b = -1204$.

Ex. 78. À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, calculer une relation de Bézout pour les couples d'entiers (a, b) suivants :

(a) $a = 123, b = 456$
(b) $a = -18, b = 42$
(c) $a = -45, b = -64$
(d) $a = 35, b = 714$

Ex. 79. Montrer :

(a) Si a, b premiers entre eux, alors a et $a + b$ aussi
(b) Si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc
(c) Si a, b premiers entre eux, alors a^k et b^l aussi

Ex. 80. Soit $x \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel. Soit $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ son développement décimal. Montrer les critères de divisibilité classiques suivants :

(a) L'entier n est divisible par 3 si et seulement si 3 divise $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$.
(b) L'entier n est divisible par 5 si et seulement si 5 divise x_0.
(c) L'entier n est divisible par 9 si et seulement si 9 divise $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$.
(d) L'entier n est divisible par 11 si et seulement si 11 divise $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i$.

Ex. 81. Les nombres suivants sont-ils premiers ?

(a) 111
(b) 1111
(c) 11111
(d) 111111

Ex. 82. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$ les expressions $a(n)$ suivantes sont divisibles par b.

(a) $a(n) = 4^n + 2^{n+1}$, $b = 7$
(b) $a(n) = 9^n + 3^{n+1}$, $b = 13$
(c) $a(n) = 25^n + 5^{n+1}$, $b = 31$

Ex. 83. Déterminer, selon la parité de n, le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8.

Ex. 84. Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Ex. 85. Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$.

Ex. 86. Montrer qu'il n'existe pas d'entier relatif $n \in \mathbf{Z}$ tel que 169 divise $n^2 + 20n + 74$.

Ex. 87. Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 5$, l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Ex. 88. (a) Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que $a^2 - b^2, a^2$ sont encore premiers entre eux.
(b) En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$, le nombre réel $\sqrt{n/(n+2)}$ n'est pas un nombre rationnel.

Ex. 89. Trouver le reste de :

(a) $247349 \mod 7$ (b) $13572013 \mod 5$

Ex. 90. Montrer que tout entier naturel, congru à 7 modulo 8, ne peut être obtenu comme la somme de trois carrés (dans $\mathbf{N}$).

Ex. 91. Déterminer les entiers naturels $n \in \mathbf{N}$ tels que $5^n \equiv -1 \pmod{13}$.

Ex. 92. Répondre aux questions suivantes :

(a) Soit $x \in \mathbf{Z}$. Montrer que, si $x \geq 5$, alors $\sum_{k=1}^{x} k! \equiv \sum_{k=1}^{4} k! \pmod{10}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=1}^{4} k! \equiv 3 \pmod{10}$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas d'entier $y \in \mathbf{Z}$ tel que $y^2 \equiv 3 \pmod{10}$.

(d) Résoudre dans $\mathbf{N}^2$ l'équation aux congruences (en les variables x, y) suivante :

$$\sum_{i=1}^{x} k! = y^2.$$

Ex. 93. Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, l'entier $2^n + 3^n + 5^n$ n'est pas divisible par 7.

Ex. 94. Montrer que l'entier $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.

Ex. 95. Résoudre les équations modulaires suivantes (en la variable x) :

(a) $x^2 - \bar{2}x - \bar{2} \equiv 0 \pmod{5}$.

(b) $x^2 - x - \bar{1} \equiv 0 \pmod{3}$.

(c) $x^2 - \bar{2}x + \bar{2} \equiv 0 \pmod{7}$.

Ex. 96. Trouver les inverses modulo n de l'entier a dans le cas suivants, après avoir justifié l'existence de cet inverse :

(a) $a = 5$ et $n = 8$.

(b) $a = 32$ et $n = 17$.

(c) $a = 193$ et $n = 2014$.

(d) $a = 111$ et $n = 200$.

Ex. 97. Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 2$. Montrer que si $a \equiv b \mod n$, alors $a^n \equiv b^n \mod n^2$.

Ex. 98. Montrer que :

(a) $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13 (b) $\forall n \in \mathbf{N} \;\; 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{4n+2}$

Ex. 99. Montrer :

(a) $6^n \equiv 6 \mod 10$ pour $n > 0$

(b) En déduire le chiffre des unités de 123456789

(c) $566 \equiv 56 \mod 100$

(d) Déduire le chiffre des dizaines de 123456789

Ex. 100. Déterminer les trois derniers chiffres de :

(a) 49^2

(b) 40^{15}

(c) 7^{20}

(d) 7^{1001}

Ex. 101. Peut-on placer les nombres 1 à 30 dans :

(a) un tableau 5×6 avec même somme par colonne ?

(b) un tableau 6×5 ?

Ex. 102. (a) Montrer par l'absurde : si $n \equiv 3 \mod 4$, alors il existe un entier p premier congru à 3 modulo 4.

(b) Pour tous entiers relatifs $n_1, \ldots, p_r$, on a $4p_1 \ldots p_r - 1 \equiv 3 \mod 4$

(c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Ex. 103. Soient $a = 2873$, $b = 1001$:

(a) Trouver $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ et $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = d$

(b) Peut-on trouver $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = 15$?

Ex. 104. Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations (en les variables x, y) suivantes :

(a) $2x + 5y = 3$.

(b) $323x - 391y = 612$.

(c) $162x - 207y = 27$.

(d) $221x + 247y = 15$.

Ex. 105. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ les équations modulaires (en la variable x) suivantes :

(a) $4x \equiv 5 \pmod 9$.

(b) $66x \equiv 7 \pmod{11}$.

(c) $3x \equiv 6 \pmod 9$.

(d) $13x + 5 \equiv 4 \pmod 7$.

Ex. 106. Trouver tous les entiers naturels $n \in \{1, \ldots, 105\}$ dont les restes dans la division euclidienne par $3, 5, 7$ sont respectivement $1, 2, 3$.

Ex. 107. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ les systèmes d'équations aux congruences (en la variable x) linéaires suivants :

$$(1)\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 5 \pmod 7 \\ x & \equiv & -5 \pmod{11} \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 5 \pmod 4 \\ x & \equiv & -6 \pmod 2 \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 5 \pmod{18} \\ x & \equiv & 5 \pmod{24} \end{array}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 2 \pmod 7 \\ x & \equiv & 1 \pmod 8 \\ x & \equiv & 3 \pmod 9 \end{array}\right.$$

$$(5)\left\{\begin{array}{lll} 3x & \equiv & 4 \pmod{10} \\ x & \equiv & 2 \pmod 3 \\ 2x & \equiv & 1 \pmod 5 \end{array}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{array}{lll} 5x & \equiv & 2 \pmod 7 \\ x & \equiv & 4 \pmod 6 \\ 4x & \equiv & 3 \pmod 9 \\ x & \equiv & 1 \pmod 5 \end{array}\right.$$

Ex. 108. Soit $a \geq 2$ et $b \in \mathbf{Z}$ deux entiers relatifs. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$ il existe un entier relatif $x \in \mathbf{Z}$ tel que $ax + b \equiv 0 \pmod n$.

(b) Il existe un entier relatif $x \in \mathbf{Z}$ tel que $ax + b = 0$.

Ex. 109. Répondre aux questions suivantes :

(a) Trouver des entiers naturels $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{N}$ tels que $6x^2 + 5x + 1 = (ax + b)(\alpha x + \beta)$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas d'entier relatif $x \in \mathbf{Z}$ tel que $6x^2 + 5x + 1 = 0$.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels $(t, m) \in \mathbf{N}^2$ tel que l'entier m soit impair et $n = 2^t m$.

(d) Montrer qu'il existe un entier naturel $x \in \mathbf{N}$ tel que $3x \equiv -1 \pmod{2^t}$ et $2x \equiv -1 \pmod m$.

(e) Déduire de la question 1) que $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod m$.

Ex. 110. Deux personnes A, B communiquent en utilisant le protocole RSA. La clé publique de B est $(n = 209, e = 7)$

(a) A veut transmettre le message $m = 5$ à B. Quel message, noté C, la personne B va-t-elle recevoir ?

(b) Quelle est la clé privée de B ?

(c) B reçoit finalement $C' = 2$: quel message A lui a-t-elle envoyé ?