Algèbre et Arithmétique 1

CC1 - Corrigé

Exercice 1
On considère le nombre complexe

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} + e^{i\frac{\pi}{6}}$$

1. On reconnait $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi,

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

La quasi-totalité des copies ont perdu du temps à passer z sous forme algébrique avant de reconnaitre sa forme exponentielle.

2. Sous forme algébrique, $z = \sqrt{3}+i$, donc $\overline{z} = \boxed{\sqrt{3}-i}$.

3. Comme $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-i}{4}}$.

4. Le module de z est $|z| = |2e^{i\frac{\pi}{6}}| = 2$, donc $\left|\frac{z}{2}\right| = \boxed{1}$.

5. On a

$$ze^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

L'argument principal de $ze^{i\frac{\pi}{4}}$ est donc $\boxed{\frac{5\pi}{12}}$.

De manière générale, trop de copies n'ont pas réutilisé les résultats des questions précédentes, reprenant les calculs du début à chaque question.

Exercice 2

On considère un nombre complexe $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

1. Par la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} z^5 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta + 10i^2\cos^3\theta\sin^2\theta + 10i^3\cos^2\theta\sin^3\theta + 5i^4\cos\theta\sin^4\theta + i^5\sin^5\theta \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta \\ &= \boxed{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i(\sin^5\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta)} \end{aligned}$$

> Beaucoup de copies ont utilisé la formule de Moivre pour obtenir
> $$z^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$$
> Cette formule est vraie, mais n'est pas une fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

2. On en déduit
$$\mathrm{Re}(z^5) = \boxed{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta}$$

3. On a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \sin^4\theta &= \left(\sin^2\theta\right)^2 \\ &= \left(1 - \cos^2\theta\right)^2 \\ &= 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta \end{aligned}$$

4. Par la formule de Moivre, on a $z^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$, donc $\mathrm{Re}(z^5) = \cos(5\theta)$.

> Beaucoup de copies qui avaient utilisé la formule de Moivre en question 2 ne l'ont pas rappelée en question 4.

5. Par les questions 2 et 4, on déduit
$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
Par la question 3, on obtient donc
$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta - 10\cos^3\theta + 5\cos^5\theta \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \end{aligned}$$
Ce qui conclut.

Exercice 3

1. Soit z un nombre complexe. Alors

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 = -z + e^{i\frac{\pi}{4}} &\iff e^{i\frac{\pi}{3}}z + z = e^{i\frac{\pi}{4}} - 2 \\ &\iff \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1\right) z = e^{i\frac{\pi}{4}} - 2 \\ &\iff z = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - 2}{e^{i\frac{\pi}{3}} + 1} \end{aligned}$$

On calcule maintenant la forme algébrique de z:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - 2}{e^{i\frac{\pi}{3}} + 1} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} + 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 4 + i\sqrt{2}}{3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - 4 + i\sqrt{2})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{2} - 12 + 3i\sqrt{2} - i\sqrt{3}\sqrt{2} + 4i\sqrt{3} - i^2\sqrt{2}\sqrt{3}}{12} \\ &= \boxed{\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6} - 12}{12} + i\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4\sqrt{3}}{12}} \end{aligned}$$

Certaines copies ont eu du mal à isoler z dans la première partie de la question. Le passage sous forme algébrique a causé des erreurs de calcul dans la majorité des copies.

2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors

$$|z + 1|^2 = |x + 1 + iy|^2 = (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$$

Et

$$\begin{aligned} \left|e^{i\frac{\pi}{6}}z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|^2 &= \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 \times \left|z + 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 \\ &= |z + \sqrt{3} + i|^2 \\ &= (x + \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 \\ &= x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 + 2y + 1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |z + 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| &\iff |z + 1|^2 = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 2y + 4 \\ &\iff 2y = 2x - 2\sqrt{3}x - 3 \\ &\iff y = (1 - \sqrt{3})x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Cette question n'a presque jamais été abordée.
Certaines copies ont cependant fait la confusion entre égalité de modules et égalité de nombres, ce qui est faux (par contre-exemple 1, i, −1 et −i ont tous même module, à savoir 1).