Petit mémo : étude de fonction

Limites des fonctions usuelles

En $\pm\infty$:

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
x^n	$+\infty$	$-\infty$ si n est impair $+\infty$ si n est pair
$\sqrt{x}$	$+\infty$	Non définie
$\ln(x)$	$+\infty$	Non définie
e^x	$+\infty$	0

En 0 :

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$
$\frac{1}{x^n}$	$+\infty$	$-\infty$ si n est impair $+\infty$ si n est pair
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	Non définie
$\ln(x)$	$-\infty$	Non définie

Opérations avec limites

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	$\ell+\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	FI	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	0	0	FI	FI	FI

En vert : règle des signes

Étapes d'une étude de fonction

1. Ensemble de définition (déterminer les valeurs interdites) ;
2. Dérivée : $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) < 0$;
3. Limites en $+\infty$, $-\infty$ et autour de chaque valeur interdite ;
4. Tableau de variation.

Exemple

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

   On remarque que $f'(x) < 0$ sur tout l'ensemble de définition de f.
3. On calcule les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 1^- et 1^+ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

4. On trace le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

5. (Bonus) On trace une allure du graphe de f :