Stage de Recherche
Master 2

Formalismes à six foncteurs

David Kolar
Sous la direction de Bernard Le Stum

∞-Catégories

On note Δ la catégorie des ensembles ordonnées finis et des applications croissantes.

Définition 1.1.1 (Ensemble simplicial)

Un *ensemble simplicial* X est un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.
Un *n-simplexe* de X est un élément de $X_n = X([n])$.
Un *sommet* de X est un 0-simplexe, une *arête* de X est un 1-simplexe.

On note Δ^n le simplexe standard, représenté par $[n]$.

Ensembles simpliciaux: Nerfs, frontières et cornes

Définition 1.1.2 (Nerf)

Le foncteur nerf sur la catégorie **Cat** est défini par

$$\begin{array}{cccccc} \Delta^{-} & : & \mathbf{Cat} & \rightarrow & \mathbf{sSet} \\ & & \mathcal{C} & \mapsto & [n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], \mathcal{C}) \end{array}$$

Définition 1.1.2 (Nerf)

Le foncteur nerf sur la catégorie **Cat** est défini par

$$\begin{array}{cccc} \Delta^{-} & : & \mathbf{Cat} & \to & \mathbf{sSet} \\ & & \mathcal{C} & \mapsto & [n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], \mathcal{C}) \end{array}$$

On a $\Delta^n \simeq \Delta^{[n]}$.

Ensembles simpliciaux: Nerfs, frontières et cornes

Définition 1.1.2 (Nerf)

Le foncteur nerf sur la catégorie **Cat** est défini par

$$\begin{array}{cccc} \Delta^{-} & : & \mathbf{Cat} & \to & \mathbf{sSet} \\ & & \mathcal{C} & \mapsto & [n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], \mathcal{C}) \end{array}$$

On a $\Delta^n \simeq \Delta^{[n]}$.

Définition 1.1.3 (Frontière)

La frontière d'une simplexe standard Δ^n est l'ensemble simplicial

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{[m] \subsetneq [n]} \Delta^m$$

Ensembles simpliciaux: Nerfs, frontières et cornes

Définition 1.1.2 (Nerf)

Le foncteur nerf sur la catégorie **Cat** est défini par

$$\begin{array}{cccc} \Delta^{-} & : & \mathbf{Cat} & \to & \mathbf{sSet} \\ & & \mathcal{C} & \mapsto & [n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], \mathcal{C}) \end{array}$$

On a $\Delta^n \simeq \Delta^{[n]}$.

Définition 1.1.3 (Frontière)

La frontière d'une simplexe standard Δ^n est l'ensemble simplicial

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{[m] \subsetneq [n]} \Delta^m$$

Définition 1.1.4 (Corne)

La k^e corne d'un simplexe standard Δ^n est l'ensemble simplicial

$$\Lambda^n_k = \bigcup_{\substack{[m] \subsetneq [n] \\ k \in [m]}} \Delta^m$$

Définition 1.1.5 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, tail] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

On dit que f est une *fibration*

Définition 1.1.5 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

On dit que f est une *fibration*

intérieure lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k < n$;

Définition 1.1.5 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

On dit que f est une *fibration*

intérieure lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k < n$;

à gauche lorsque ce problème admet une solution pour $0 \leq k < n$;

Définition 1.1.5 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

On dit que f est une *fibration*

intérieure lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k < n$;

à gauche lorsque ce problème admet une solution pour $0 \leq k < n$;

à droite lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k \leq n$;

Définition 1.1.5 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

On dit que f est une *fibration*

- *intérieure* lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k < n$;
- *à gauche* lorsque ce problème admet une solution pour $0 \leq k < n$;
- *à droite* lorsque ce problème admet une solution pour $0 < k \leq n$;
- *de Kan* lorsque ce problème admet une solution pour $0 \leq k \leq n$.

Définition 1.1.8 (Arête co-cartésienne)

Soit $f : K \to L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Une arête e de K est *f-co-cartésienne* lorsque, pour $n \geq 2$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[d, tail] \arrow[dr, "e"] & \\ \Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & K \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L \end{tikzcd}$$

admet une solution.

Ensembles simpliciaux: Fibrations

Définition 1.1.8 (Arête co-cartésienne)

Soit $f : K \to L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Une arête e de K est *f-co-cartésienne* lorsque, pour $n \geq 2$, le problème de relèvement

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\{0,1\}} \arrow[d, tail] \arrow[dr, "e"] & \\
\Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d, tail] & K \arrow[d, "f"] \\
\Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L
\end{tikzcd}$$

admet une solution.

Définition 1.1.9 (Fibration co-cartésienne)

Une *fibration co-cartésienne* est une fibration intérieure $f : K \to L$ telle que, pour toute arête $e : S \to T$ de L et tout relèvement $\tilde{S}$ de S, il existe une arête f-co-cartésienne $\tilde{e} : \tilde{S} \to \tilde{T}$ relevant e.

Définition 1.1.11 (Composantes connexes)

L'*ensemble des composantes connexes* d'un ensemble simplicial K est l'ensemble $\pi_0(K)$ des classes d'équivalence de K_0 sous la relation

$$K_1 \xrightarrow{d_1 \times d_0} K_0 \times K_0$$

Définition 1.1.11 (Composantes connexes)

L'*ensemble des composantes connexes* d'un ensemble simplicial K est l'ensemble $\pi_0(K)$ des classes d'équivalence de K_0 sous la relation

$$K_1 \xrightarrow{d_1 \times d_0} K_0 \times K_0$$

Définition 1.1.11 (Lacet)

Pour $x \in K_0$, un *n-lacet* en x est un morphisme $\alpha : \Delta^n \to K$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Delta^0 \arrow[d, "x"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\alpha"'] & K \end{tikzcd}$$

Définition 1.1.11 (Homotopie)

Deux n-lacets α, α' en x sont *homotopes* lorsqu'il existe une *homotopie simpliciale* η faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[d, "\mathrm{id}\times\delta^0"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\eta"] & K \\
\Delta^n \arrow[u, "\mathrm{id}\times\delta^1"] \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\partial\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^0 \arrow[d, "x"] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\eta"'] & K
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.11 (Homotopie)

Deux n-lacets α, α' en x sont *homotopes* lorsqu'il existe une *homotopie simpliciale* η faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta^0"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\eta"] & K \\
\Delta^n \arrow[u, "\mathrm{id} \times \delta^1"] \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\partial\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^0 \arrow[d, "x"] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "\eta"'] & K
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.11 (Groupe d'homotopie)

Le *n^e groupe*[1] *d'homotopie* d'un ensemble simplicial K en x est l'ensemble $\pi_n(K, x)$ des classes d'équivalence de n-lacets sous la relation d'homotopie.

Définition 1.1.14 (Équivalence faible)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$ est une *équivalence faible* lorsqu'il induit des isomorphismes entre les ensembles de composantes connexes et entre chaque groupes d'homotopie.

Ensembles simpliciaux: Animation

Définition 1.1.14 (Équivalence faible)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$ est une *équivalence faible* lorsqu'il induit des isomorphismes entre les ensembles de composantes connexes et entre chaque groupes d'homotopie.

Définition 1.1.15 (Ensemble animé)

La catégorie des *ensembles animés* est la localisation de s**Set** aux équivalences faibles.

Définition 1.1.14 (Équivalence faible)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \to L$ est une *équivalence faible* lorsqu'il induit des isomorphismes entre les ensembles de composantes connexes et entre chaque groupes d'homotopie.

Définition 1.1.15 (Ensemble animé)

La catégorie des *ensembles animés* est la localisation de s**Set** aux équivalences faibles.

On notera **Ani** cette ∞-catégorie.

∞-Catégories

Définition 1.2.1 (∞-Catégorie)

Une ∞-catégorie est un ensemble simplicial $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \to *$ est une fibration intérieure.

Définition 1.2.1 (∞-Catégorie)

Une ∞-catégorie est un ensemble simplicial $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \to *$ est une fibration intérieure.

Remarque

De manière équivalente, une ∞-catégorie est un ensemble simplcial $\mathcal{C}$ tel que la restriction

$$\mathrm{Hom}_{s\mathbf{Set}}(\Delta^2, \mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}_{s\mathbf{Set}}(\Lambda^2_1, \mathcal{C})$$

est une fibration triviale.

Définition 1.2.2 (Foncteur)

Un *foncteur* entre deux ∞-catégories est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

∞-Catégories

Définition 1.2.2 (Foncteur)

Un *foncteur* entre deux ∞-catégories est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Définition 1.2.3 (Transformation naturelle)

Une *transformation naturelle* entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux $\eta : \mathcal{C} \times \Delta^1 \to \mathcal{C}'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta^0"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{C} \times \Delta^1 \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{C}' \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\mathrm{id} \times \delta^1"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit K un ensemble simplicial.

Les foncteurs $K \to \mathcal{C}$ forment une ∞-catégorie, notée $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$.

$\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ admet un complexe de Kan maximal, noté $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})^{\simeq}$.

On note $\mathbf{Cat}_\infty$ l'∞-catégorie dont les objets sont les ∞-catégories et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\simeq}$$

Définition 1.2.9 (Catégorie d'homotopie)

La *catégorie d'homotopie* $\mathrm{h}\mathcal{C}$ d'une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{C}$ par l'adjoint du foncteur de nerf.

Remarque

$\mathrm{h}\mathcal{C}$ a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 1.2.9 (Catégorie d'homotopie)

La *catégorie d'homotopie* $\mathrm{h}\mathcal{C}$ d'une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{C}$ par l'adjoint du foncteur de nerf.

Remarque

$\mathrm{h}\mathcal{C}$ a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 1.2.10 (Équivalence)

Un morphisme dans une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est une *équivalence* lorsque son image dans $\mathrm{h}\mathcal{C}$ est un isomorphisme.

Définition 1.2.12 (Catégorie des préfaisceaux)

L'∞-*catégorie des préfaisceaux* d'animas sur une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$$

Définition 1.2.12 (Catégorie des préfaisceaux)

L'∞-*catégorie des préfaisceaux* d'animas sur une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$$

Lemme 1.2.13 (Lemme de Yoneda)

Pour une ∞-catégorie $\mathcal{C}$, le *plongement de Yoneda*

$$\begin{array}{cccc} よ & : & \mathcal{C} & \to & \mathcal{P}(\mathcal{C}) \\ & & X & \mapsto & [Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)] \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Définition 1.2.12 (Catégorie des préfaisceaux)

L'∞-*catégorie des préfaisceaux* d'animas sur une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$$

Lemme 1.2.13 (Lemme de Yoneda)

Pour une ∞-catégorie $\mathcal{C}$, le *plongement de Yoneda*

$$\begin{array}{cccc} よ & : & \mathcal{C} & \to & \mathcal{P}(\mathcal{C}) \\ & & X & \mapsto & [Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)] \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Théorème 1.2.14 (Théorème de Yoneda)

Soient $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ani}$ un foncteur. Alors le foncteur composé

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{よ} \mathcal{P}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-,F)} \mathbf{Ani}$$

est équivalent à F.

Théorème 1.2.15 (Lissage-Délissage)

Soit $\mathcal{S}$ une ∞-catégorie. Il y a une équivalence d'∞-catégories

$$\mathrm{St} : \mathrm{cocart}(\mathcal{S}) \leftrightarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathbf{Cat}_\infty) : \mathrm{Un}$$

Définition 1.2.16 (Limite)

Soit $F : K \to \mathcal{C}$ un diagramme. Un objet $Y \in \mathcal{C}$ est une *limite* de F lorsqu'il existe une transformation naturelle $\underline{Y}_K \to F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{C})}(\underline{X}_K, F)$$

Définition 1.2.16 (Limite)

Soit $F : K \to \mathcal{C}$ un diagramme. Un objet $Y \in \mathcal{C}$ est une *limite* de F lorsqu'il existe une transformation naturelle $\underline{Y}_K \to F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{C})}(\underline{X}_K, F)$$

Définition 1.2.16 (Colimite)

Duallement, un objet $X \in \mathcal{C}$ est une *colimite* de F lorsqu'il existe une transformation naturelle $F \to \underline{X}_K$ induisant, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{C})}(F, \underline{Y}_K)$$

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;

initial lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide;

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final	lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;
initial	lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide;
nul	lorsqu'il est initial et final.

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;

initial lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide;

nul lorsqu'il est initial et final.

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

- *final* lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;
- *initial* lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide;
- *nul* lorsqu'il est initial et final.

Une ∞-catégorie est dite *pointée* lorsqu'elle admet un objet nul.

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final	lorsqu'il est limite d'un diagramme vide;
initial	lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide;
nul	lorsqu'il est initial et final.

Une ∞-catégorie est dite *pointée* lorsqu'elle admet un objet nul.

On note $\varnothing$ l'objet initial, $*$ l'objet final et 0 l'objet nul, lorsqu'ils existent.

Définition 1.2.18 (Produit, co-produit)

Un *produit* est une limite d'un diagramme discret.
Un *co-produit* est une colimite d'un diagramme discret.

Définition 1.2.18 (Produit, co-produit)

Un *produit* est une limite d'un diagramme discret.
Un *co-produit* est une colimite d'un diagramme discret.

On note $X \times Y$ (ou $\prod_{i \in I} X_i$) un produit et $X + Y$ (ou $\coprod_{i \in I} X_i$) un co-produit.

Définition 1.2.18 (Produit, co-produit)

Un *produit* est une limite d'un diagramme discret.
Un *co-produit* est une colimite d'un diagramme discret.

On note $X \times Y$ (ou $\prod_{i \in I} X_i$) un produit et $X + Y$ (ou $\coprod_{i \in I} X_i$) un co-produit.

Définition 1.2.19 (Produit fibré, somme amalgamée)

Un *produit fibré* est une limite d'un diagramme de forme $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$.
Une *somme amalgamée* est une colimite d'un diagramme de forme $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$.

Définition 1.2.18 (Produit, co-produit)

Un *produit* est une limite d'un diagramme discret.
Un *co-produit* est une colimite d'un diagramme discret.

On note $X \times Y$ (ou $\prod_{i \in I} X_i$) un produit et $X + Y$ (ou $\coprod_{i \in I} X_i$) un co-produit.

Définition 1.2.19 (Produit fibré, somme amalgamée)

Un *produit fibré* est une limite d'un diagramme de forme $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$.
Une *somme amalgamée* est une colimite d'un diagramme de forme $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$.

On note $X \underset{Z}{\times} Y$ un produit fibré et $X \underset{Z}{+} Y$ une somme amalgamée.

Théorème 1.2.24

Une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ admet toutes les colimites finies si et seulement si elle admet toutes les sommes amalgamées et un objet initial.

Théorème 1.2.24

Une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ admet toutes les colimites finies si et seulement si elle admet toutes les sommes amalgamées et un objet initial.

Théorème 1.2.26

Soit X un objet d'une ∞-catégorie $\mathcal{C}$. Alors le foncteur

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

préserve les limites qui existent dans $\mathcal{C}$.

Définition 1.2.27 (Adjoint)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre ∞-catégories est *adjoint* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ lorsqu'il existe une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \to G \circ F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

Définition 1.2.27 (Adjoint)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre ∞-catégories est *adjoint* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ lorsqu'il existe une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \to G \circ F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

Proposition 1.2.29

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur admettant un co-adjoint G. Alors F préserve toutes les colimites.

∞-Catégories: Adjonctions

Définition 1.2.27 (Adjoint)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre ∞-catégories est *adjoint* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ lorsqu'il existe une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \to G \circ F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

Proposition 1.2.29

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur admettant un co-adjoint G. Alors F préserve toutes les colimites.

Duallement, G préserve toutes les limites.

∞-Catégorie: Présentabilité

Définition 1.2.31 (Ensemble simplicial filtré)

Un ensemble simplicial K est *filtré* lorsque toute colimite de forme K dans **Ani** existe et commute avec toutes les limites finies.

Définition 1.2.31 (Ensemble simplicial filtré)

Un ensemble simplicial K est *filtré* lorsque toute colimite de forme K dans **Ani** existe et commute avec toutes les limites finies.

Définition 1.2.32

Soit $\mathcal{C}$ une petite ∞-catégorie. $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ est l'∞-catégorie ayant pour objets les petits diagrammes filtrés $X : D_X \to \mathcal{C}$ et comme animas de morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(X, Y) = \lim_{d \in D_X} \operatorname*{colim}_{d' \in D_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X(d), Y(d'))$$

Définition 1.2.33 (∞-Catégorie accessible)

Une ∞-catégorie est *accessible* lorsqu'il existe une petite ∞-catégorie $\mathcal{C}'$ telle que

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$$

Définition 1.2.33 (∞-Catégorie accessible)

Une ∞-catégorie est *accessible* lorsqu'il existe une petite ∞-catégorie $\mathcal{C}'$ telle que

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$$

Définition 1.2.34 (∞-Catégorie présentable)

Une ∞-catégorie est *présentable* lorsqu'elle est accessible et qu'elle admet toutes les petites colimites.

∞-Catégorie: Présentabilité

Définition 1.2.33 (∞-Catégorie accessible)

Une ∞-catégorie est *accessible* lorsqu'il existe une petite ∞-catégorie $\mathcal{C}'$ telle que

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$$

Définition 1.2.34 (∞-Catégorie présentable)

Une ∞-catégorie est *présentable* lorsqu'elle est accessible et qu'elle admet toutes les petites colimites.

Proposition 1.2.35

Une ∞-catégorie est présentable si et seulement si elle est localement petite et qu'elle est engendrée par petites colimites d'un petit ensemble d'objets.

Structures monoïdales symétriques

On note **Fin**$_*$ la catégorie des ensembles finis $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$ et des applications partielles, et $\rho_i^n : \langle n \rangle \rightharpoonup \langle 1 \rangle$ l'unique morphisme défini uniquement en i.

On note $\mathbf{Fin}_*$ la catégorie des ensembles finis $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$ et des applications partielles, et $\rho_i^n : \langle n \rangle \rightharpoonup \langle 1 \rangle$ l'unique morphisme défini uniquement en i.

Définition 1.3.1 (∞-Catégorie monoïdale symétrique)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. Une *structure monoïdale symétrique* sur $\mathcal{C}$ est une fibration co-cartésienne

$$\mathcal{C}^{\otimes} \to \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

telle que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\otimes}_{\langle 1 \rangle}$ et les morphismes ρ_i^n induisent des foncteurs $\mathcal{C}^{\otimes}_{\langle n \rangle} \to \mathcal{C}$ qui déterminent une équivalence

$$\mathcal{C}^{\otimes}_{\langle n \rangle} \simeq \mathcal{C}^n$$

On note $\mathbf{Fin}_*$ la catégorie des ensembles finis $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ et des applications partielles, et $\rho_i^n : \langle n\rangle \rightharpoonup \langle 1\rangle$ l'unique morphisme défini uniquement en i.

Définition 1.3.1 (∞-Catégorie monoïdale symétrique)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. Une *structure monoïdale symétrique* sur $\mathcal{C}$ est une fibration co-cartésienne

$$\mathcal{C}^{\otimes} \to \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

telle que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}$ et les morphismes ρ_i^n induisent des foncteurs $\mathcal{C}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \to \mathcal{C}$ qui déterminent une équivalence

$$\mathcal{C}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \simeq \mathcal{C}^n$$

Remarque

Par le théorème de Lissage-Délissage, une structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{C}$ peut se comprendre comme un foncteur $\Delta^{\mathbf{Fin}_*} \to \mathbf{Cat}_\infty$ par lequel $\langle 1\rangle$ a pour image $\mathcal{C}$.

Définition 1.3.4 (∞-Catégorie monoïdale symétrique fermée)

Une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est dite *fermée* lorsque, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, le foncteur $- \otimes Y$ admet un co-adjoint $\mathcal{H}om(Y, -)$.

Définition 1.3.4 (∞-Catégorie monoïdale symétrique fermée)

Une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est dite *fermée* lorsque, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, le foncteur $- \otimes Y$ admet un co-adjoint $\mathcal{H}om(Y, -)$.

Définition (Structure monoïdale symétrique cartésienne)

Une structure monoïdale symétrique sur une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est dite *cartésienne* lorsque $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est final et que, pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, $X \otimes Y \simeq X \times Y$.

Structures monoïdales symétriques

Définition 1.3.4 (∞-Catégorie monoïdale symétrique fermée)

Une ∞-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est dite *fermée* lorsque, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, le foncteur $- \otimes Y$ admet un co-adjoint $\mathcal{H}om(Y, -)$.

Définition (Structure monoïdale symétrique cartésienne)

Une structure monoïdale symétrique sur une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est dite *cartésienne* lorsque $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ est final et que, pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, $X \otimes Y \simeq X \times Y$.

Remarque

Une telle structure est essentiellement unique.

Définition 1.3.3 (Foncteur monoïdal symétrique)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux ∞-catégories admettant des structures monoïdales symétriques, définies par des fibrations

$$\mathcal{C}^{\otimes}, \mathcal{C}'^{\otimes} \to \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

Un *foncteur monoïdal symétrique (faible)* est un foncteur $\mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{C}'^{\otimes}$ au-dessus de $\mathbf{Fin}_*$ préservant les relèvements co-cartésiens des ρ_i^n.

Définition 1.3.3 (Foncteur monoïdal symétrique)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux ∞-catégories admettant des structures monoïdales symétriques, définies par des fibrations

$$\mathcal{C}^{\otimes}, \mathcal{C}'^{\otimes} \to \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

Un *foncteur monoïdal symétrique (faible)* est un foncteur $\mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{C}'^{\otimes}$ au-dessus de $\mathbf{Fin}_*$ préservant les relèvements co-cartésiens des ρ_i^n.

Définition 1.3.3 (Foncteur monoïdal symétrique fort)

Un foncteur monoïdal symétrique est dit *fort* lorsqu'il préserve tous les relèvements co-cartésiens.

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Un *triangle* de $\mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Stabilité

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Un *triangle* de $\mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

On note plus souvent $X \to Y \to Z$ un triangle.

Parenthèse: diagramme "commutatif"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Parenthèse: diagramme "commutatif"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Parenthèse: diagramme "commutatif"

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow" near start] \\
0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow" near start] & Z
\end{tikzcd}
$$

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Un *triangle* de $\mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

On note plus souvent $X \to Y \to Z$ un triangle.

Stabilité

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Un *triangle* de $\mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

On note plus souvent $X \to Y \to Z$ un triangle.

Définition 1.4.2 (Suite fibrée, co-fibrée)

Un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une *suite*

- fibrée lorsque c'est un produit fibré;
- co-fibrée lorsque c'est une somme amalgamée.

On dit alors que X est la *fibre* de g, et que Z est la *co-fibre* de f.

Stabilité

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Un *triangle* de $\mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

On note plus souvent $X \to Y \to Z$ un triangle.

Définition 1.4.2 (Suite fibrée, co-fibrée)

Un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une *suite*

- **fibrée** lorsque c'est un produit fibré;
- **co-fibrée** lorsque c'est une somme amalgamée.

On dit alors que X est la *fibre* de g, et que Z est la *co-fibre* de f.

On note $\mathrm{fib}(g)$ la fibre d'un morphisme, et $\mathrm{cofib}(f)$ sa co-fibre.

Stabilité

Définition 1.4.3 (∞-Catégorie stable)

Une ∞-catégorie pointée est *stable* lorsque

- Tout morphisme admet une fibre et une co-fibre;
- Un triangle est une suite fibrée si et seulement si c'est une suite co-fibrée.

Stabilité

Définition 1.4.3 (∞-Catégorie stable)

Une ∞-catégorie pointée est *stable* lorsque

- Tout morphisme admet une fibre et une co-fibre;
- Un triangle est une suite fibrée si et seulement si c'est une suite co-fibrée.

Remarque

La stabilité est une propriété auto-duale.

Stabilité

Définition 1.4.3 (∞-Catégorie stable)

Une ∞-catégorie pointée est *stable* lorsque

- Tout morphisme admet une fibre et une co-fibre;
- Un triangle est une suite fibrée si et seulement si c'est une suite co-fibrée.

Remarque

La stabilité est une propriété auto-duale.

Proposition 1.4.4

Une ∞-catégorie pointée $\mathcal{C}$ est stable si et seulement si

- Elle admet toutes les limites et colimites finies;
- Un carré est un produit fibré si et seulement si c'est une somme amalgamée.

Théorème 1.4.11 (Correspondance de Dold-Kan)

Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} s\mathbf{Ab} & \to & \mathrm{Ch}_+(\mathbf{Ab}) \\ A_\bullet & \mapsto & \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i)\right)_n \end{array}$$

induit une équivalence de catégories.

Théorème 1.4.11 (Correspondance de Dold-Kan)

Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} s\mathbf{Ab} & \to & \mathrm{Ch}_+(\mathbf{Ab}) \\ A_\bullet & \mapsto & \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i)\right)_n \end{array}$$

induit une équivalence de catégories.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. En notant, pour A et B dans $\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A})$,

$$\mathrm{Hom}(A,B)_n = \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A})}(A_i, B_{i+n})$$

on fait de $\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A})$ une catégorie enrichie en complexes de groupes abéliens.

Définition 1.4.12 (∞-Catégorie dérivée)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs. L'∞-*catégorie dérivée* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{N}(\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}))$$

Définition 1.4.12 (∞-Catégorie dérivée)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs. L'∞-*catégorie dérivée* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{N}(\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}))$$

Proposition 1.4.13

L'∞-catégorie dérivée d'une catégorie abélienne est stable.

Formalismes à six foncteurs abstraits

Définition 2.1.1 (Contexte géométrique)

Un *contexte géométrique* est la donnée d'une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ et d'une classe de morphismes E de $\mathcal{C}$ tels que

- $\mathcal{C}$ admet toutes les limites finies;
- E contient toutes les équivalences et est stable par composition et changement de base.

Correspondances

Pour $n \geq 0$, on note $(\Delta^n)^2_+$ le sous-ensemble simplicial de $(\Delta^n)^{\mathrm{op}} \times \Delta^n$ engendré par

$$\left\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \mid i \geq j\right\}$$

Correspondances

Pour $n \geq 0$, on note $(\Delta^n)^2_+$ le sous-ensemble simplicial de $(\Delta^n)^{\mathrm{op}} \times \Delta^n$ engendré par

$$\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \mid i \geq j\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (2,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & (1,0) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(0,0) & & (1,1) & & (2,2)
\end{tikzcd}$$

Définition 2.1.2 (Correspondance)

Soit $(\mathcal{C}, E)$ un contexte géométrique. L'ensemble simplicial des *correspondances* $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ a pour n-simplexes les morphismes d'ensembles simpliciaux $(\Delta^n)^2_+ \to \mathcal{C}$ tels que

- Tout morphisme induit par $(i,j) \to (i, j+k)$, avec $k \in [\![0, i-j]\!]$ est dans E;
- Tout carré induit par

$$\begin{tikzcd} & (i,j) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (i+1,j) \arrow[dr] & & (i,j+1) \arrow[dl] \\ & (i+1,j+1) & \end{tikzcd}$$

  est cartésien.

Correspondances

Définition 2.1.2 (Correspondance)

Soit $(\mathcal{C}, E)$ un contexte géométrique. L'ensemble simplicial des *correspondances* $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ a pour n-simplexes les morphismes d'ensembles simpliciaux $(\Delta^n)^2_+ \to \mathcal{C}$ tels que

- Tout morphisme induit par $(i,j) \to (i, j+k)$, avec $k \in [\![0, i-j]\!]$ est dans E;
- Tout carré induit par

$$\begin{tikzcd} & (i,j) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (i+1,j) \arrow[dr] & & (i,j+1) \arrow[dl] \\ & (i+1,j+1) & \end{tikzcd}$$

  est cartésien.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

$$X \qquad\qquad \mapsto \qquad\qquad \mathcal{D}(X)$$

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \mapsto & \mathcal{D}(X) \\ & & - \otimes - \end{array}$$

Formalismes à six foncteurs

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

$$X \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}(X) \\ - \otimes - \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & \\ Y & & X \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad f^* : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$

Formalismes à six foncteurs

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

$$X \qquad \mapsto \qquad \begin{array}{c} \mathcal{D}(X) \\ - \otimes - \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & \\ Y & & X \end{tikzcd} \qquad \mapsto \qquad f^* : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \mapsto \qquad f_! : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$$

Formalismes à six foncteurs

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Un *formalisme à trois foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

$$X \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}(X) \\ - \otimes - \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & \\ Y & & X \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad f^* : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad f_! : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$$

Définition 2.2.2 (Formalisme à six foncteurs)

Soit $(\mathcal{C}, E)$ un contexte géométrique. Un *formalisme à six foncteurs* sur $\mathcal{C}$ est un formalisme à trois foncteurs $\mathcal{D}$ tel que les ∞-catégories monoïdales symétriques $\mathcal{D}(X)$ sont toujours fermées et les foncteurs f^* et $f_!$ admettent toujours des co-adjoints.

Soit $\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$ un formalisme à trois foncteurs.

Soit $\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$ un formalisme à trois foncteurs.

Proposition 2.2.3 (Changement de base)

Pour tout carré cartésien de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec $f \in E$, on a une équivalence

$$g^* f_! \simeq f'_! g'^*$$

de foncteurs $\mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y')$.

Soit $\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$ un formalisme à trois foncteurs.

Proposition 2.2.3 (Changement de base)

Pour tout carré cartésien de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

avec $f \in E$, on a une équivalence

$$g^* f_! \simeq f'_! g'^*$$

de foncteurs $\mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y')$.

Proposition 2.2.4 (Formule de projection)

Soient $f : X \to Y$ un morphisme de E, $A \in \mathcal{D}(X)$ et $B \in \mathcal{D}(Y)$. Alors

$$f_!(A) \otimes B \simeq f_!(A \otimes f^* B)$$

Définition 2.3.1 (Décomposition de Grothendieck-Wirthmüller)

Une *décomposition de Grothendieck-Wirthmüller* de E est une paire de parties (I, P) de E telle que

- Tout morphisme $f \in E$ peut s'écrire $f \simeq i \circ p$ avec $i \in I$ et $p \in P$.
- Tout morphisme $f \in I \cap P$ est n-tronqué pour $n \geq -2$.
- I et P sont stables par changement de base et contiennent les identités.
- Pour $f \in I$ (resp. P), $f \circ g \in I$ (resp. P) si et seulement si $g \in I$ (resp. P).

Dualités: hypothèses

On fixe donc pour cette section un formalisme à six foncteurs

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

et un morphisme $f : X \to Y$ dans E. On note $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ la diagonale.

Dualités: hypothèses

On fixe donc pour cette section un formalisme à six foncteurs

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

et un morphisme $f : X \to Y$ dans E. On note $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ la diagonale.

- En remplacant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_{/Y}$, on peut supposer que Y est final;

Dualités: hypothèses

On fixe donc pour cette section un formalisme à six foncteurs

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

et un morphisme $f : X \to Y$ dans E. On note $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ la diagonale.

- En remplacant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_{/Y}$, on peut supposer que Y est final;
- En ne gardant dans $\mathcal{C}_{/Y}$ que les objets X tels que $X \to Y$ est dans E, et en ne considérant que les Y-morphismes qui sont dans E, on peut supposer que tout morphisme de $\mathcal{C}$ est dans E.

Dualités: Foncteurs de Fourier-Mukai

Définition 2.4.1 (Foncteur de Fourier-Mukai)

Soient X et X' deux objets de $\mathcal{C}$ et $K \in \mathcal{D}(X \times X')$. Le *foncteur de Fourier-Mukai de noyau* K est

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{FM}_K & : & \mathcal{D}(X) & \to & \mathcal{D}(X') \\ & & A & \mapsto & \mathrm{pr}_{2!}(K \otimes \mathrm{pr}_1^* A) \end{array}$$

Définition 2.4.1 (Foncteur de Fourier-Mukai)

Soient X et X' deux objets de $\mathcal{C}$ et $K \in \mathcal{D}(X \times X')$. Le *foncteur de Fourier-Mukai de noyau* K est

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{FM}_K & : & \mathcal{D}(X) & \rightarrow & \mathcal{D}(X') \\ & & A & \mapsto & \mathrm{pr}_{2!}(K \otimes \mathrm{pr}_1^* A) \end{array}$$

Remarque

Le composé de foncteurs de Fourier-Mukai est un foncteur de Fourier-Mukai.

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La *2-catégorie de Lu-Zheng* d'un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D}$ a pour objets les objets de $\mathcal{C}$ et pour catégorie de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') = \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

Dualités: 2-Catégorie de Lu-Zheng

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La *2-catégorie de Lu-Zheng* d'un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D}$ a pour objets les objets de $\mathcal{C}$ et pour catégorie de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') = \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

- L'identité d'un objet X dans cette 2-catégorie est $\mathrm{id}_X = \Delta_! \mathbf{1}_X$.

Dualités: 2-Catégorie de Lu-Zheng

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La *2-catégorie de Lu-Zheng* d'un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D}$ a pour objets les objets de $\mathcal{C}$ et pour catégorie de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') = \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

- L'identité d'un objet X dans cette 2-catégorie est $\mathrm{id}_X = \Delta_! \mathbf{1}_X$.
- La composition dans $\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}$ est donnée par la convolution des noyaux:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X', X'') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X'') \\ A, B & \mapsto & A \star B = \mathrm{pr}_{X,X''!}(\mathrm{pr}^*_{X,X'}(A) \otimes \mathrm{pr}^*_{X',X''}(B)) \end{array}$$

Dualités: 2-Catégorie de Lu-Zheng

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La *2-catégorie de Lu-Zheng* d'un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D}$ a pour objets les objets de $\mathcal{C}$ et pour catégorie de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') = \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

- L'identité d'un objet X dans cette 2-catégorie est $\mathrm{id}_X = \Delta_! \mathbf{1}_X$.
- La composition dans $\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}$ est donnée par la convolution des noyaux:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X', X'') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X'') \\ A, B & \mapsto & A \star B = \mathrm{pr}_{X,X''!}(\mathrm{pr}^*_{X,X'}(A) \otimes \mathrm{pr}^*_{X',X''}(B)) \end{array}$$

- Cette 2-catégorie est auto-duale: $\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}$.

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La *2-catégorie de Lu-Zheng* d'un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D}$ a pour objets les objets de $\mathcal{C}$ et pour catégorie de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_\mathcal{D}}(X, X') = \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

- L'identité d'un objet X dans cette 2-catégorie est $\mathrm{id}_X = \Delta_! \mathbf{1}_X$.
- La composition dans $\mathrm{LZ}_\mathcal{D}$ est donnée par la convolution des noyaux:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_\mathcal{D}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_\mathcal{D}}(X', X'') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_\mathcal{D}}(X, X'') \\ A, B & \mapsto & A \star B = \mathrm{pr}_{X,X''!}(\mathrm{pr}^*_{X,X'}(A) \otimes \mathrm{pr}^*_{X',X''}(B)) \end{array}$$

- Cette 2-catégorie est auto-duale: $\mathrm{LZ}_\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{LZ}_\mathcal{D}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LZ}_\mathcal{D} & \to & \mathbf{Cat} \\ X & \mapsto & \mathrm{h}\mathcal{D}(X) \\ K \in \mathrm{h}\mathcal{D}(X \times X') & \mapsto & \mathrm{FM}_K \end{array}$$

Dualités: Poincaré

Définition 2.4.4 (Dualisant)

Le *dualisant* de f est

$$\omega_f = f^!(\mathbf{1}_Y)$$

Dualités: Poincaré

Définition 2.4.4 (Dualisant)

Le *dualisant* de f est

$$\omega_f = f^!(\mathbf{1}_Y)$$

Définition 2.4.5 (Morphisme cohomologiquement lisse)

Le morphisme f est *cohomologiquement lisse* lorsque

(i). Le morphisme $\omega_f \otimes f^*(-) \to f^!(-)$ est une équivalence;

(ii). Le dualisant de f est $\otimes$-inversible;

(iii). Pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme f' vérifie les conditions (i) et (ii) et le morphisme $g'^*\omega_f \to \omega_{f'}$ est une équivalence.

Dualités: Poincaré

Théorème 2.4.6

f est cohomologiquement lisse si et seulement s'il existe un objet $\otimes$-inversible $L \in \mathcal{D}(X)$ et des morphismes

$$\alpha : \Delta_{f!}\mathbf{1}_X \to \mathrm{pr}_2^* L$$

et

$$\beta : f_! L \to \mathbf{1}_X$$

tels que les composés

$$\mathbf{1}_X \simeq \mathrm{pr}_{1!} \Delta_{f!}\mathbf{1}_X \xrightarrow{\alpha} \mathrm{pr}_{1!} \mathrm{pr}_2^* L \simeq f^* f_! L \xrightarrow{\beta} \mathbf{1}_X$$

et

$$L \simeq \mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*(L) \otimes \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*(L) \otimes \mathrm{pr}_2^*(L)) \simeq \mathrm{pr}_{2!} \mathrm{pr}_1^*(L) \otimes L \simeq f^* f_!(L) \otimes L \xrightarrow{\beta} L$$

sont équivalents à l'identité.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.7 (Objet f-lisse)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est *f-lisse* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$, c'est un adjoint.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.7 (Objet f-lisse)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f*-lisse* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$, c'est un adjoint.

Définition 2.4.7 (Objet f-propre)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f*-propre* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$, c'est un adjoint.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.7 (Objet f-lisse)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est *f-lisse* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$, c'est un adjoint.

$$B \in \mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$$
$$\alpha : \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X) \to \mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(B)$$
$$\beta : f_!(A \otimes B) \to \mathbf{1}_Y$$

Définition 2.4.7 (Objet f-propre)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est *f-propre* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$, c'est un adjoint.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.7 (Objet f-lisse)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est *f-lisse* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$, c'est un adjoint.

$$B \in \mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$$
$$\alpha : \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X) \to \mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(B)$$
$$\beta : f_!(A \otimes B) \to \mathbf{1}_Y$$

Définition 2.4.7 (Objet f-propre)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est *f-propre* lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$, c'est un adjoint.

$$B \in \mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$$
$$\alpha : \mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(B) \to \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)$$
$$\beta : \mathbf{1}_Y \to f_!(A \otimes B)$$

Dualités: Verdier

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f-lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) = \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f-lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) = \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Proposition 2.4.7

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f-lisse, de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

1. B est f-lisse, de co-adjoint A.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f-lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) = \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Proposition 2.4.7

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f-lisse, de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

1. B est f-lisse, de co-adjoint A.
2. Il y a une équivalence de foncteurs

$$B \otimes f^*(-) \simeq \mathcal{H}om(A, f^!(-)) : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$

Dualités: Verdier

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f-lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) = \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Proposition 2.4.7

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f-lisse, de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

1. B est f-lisse, de co-adjoint A.
2. Il y a une équivalence de foncteurs
$$B \otimes f^*(-) \simeq \mathcal{H}om(A, f^!(-)) : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$
3. Le morphisme naturel
$$A \to \mathbb{D}_f(\mathbb{D}_f(A))$$
est une équivalence.

Dualités: Verdier

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f-lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) = \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Proposition 2.4.7

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f-lisse, de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

1. B est f-lisse, de co-adjoint A.
2. Il y a une équivalence de foncteurs
$$B \otimes f^*(-) \simeq \mathcal{H}om(A, f^!(-)) : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$$
3. Le morphisme naturel
$$A \to \mathbb{D}_f(\mathbb{D}_f(A))$$
est une équivalence.
4. La formation du dual de Verdier commute au changement de base.

Dualités: Verdier

Proposition 2.4.10

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f-lisse si et seulement si le morphisme naturel

$$\mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathbb{D}_f(A)) \to \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*(A), \mathrm{pr}_1^!(A))$$

est un isomorphisme.

Proposition 2.4.10

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f-lisse si et seulement si le morphisme naturel

$$\mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathbb{D}_f(A)) \to \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*(A), \mathrm{pr}_1^!(A))$$

est un isomorphisme.

Proposition 2.4.12

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f-propre si et seulement si le morphisme naturel

$$f_!(A \otimes \mathrm{pr}_{2*}(\mathcal{H}om(\mathrm{pr}_1^*(A), \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)))) \to f_*\mathcal{H}om(A, A)$$

est un isomorphisme.

Coïncidences

Définition 2.5.1 (Morphisme cohomologiquement propre)

Un morphisme $f : X \to Y$ dans E est *cohomologiquement propre* lorsque

1. f est n-tronqué pour un certain n;
2. $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f-propre;
3. $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ est cohomologiquement propre (ou une équivalence).

Coïncidences

Définition 2.5.1 (Morphisme cohomologiquement propre)

Un morphisme $f : X \to Y$ dans E est *cohomologiquement propre* lorsque

1. f est n-tronqué pour un certain n;
2. $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f-propre;
3. $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ est cohomologiquement propre (ou une équivalence).

Proposition 2.5.2

Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans E tel que Δ_f soit cohomologiquement propre.

1. Il y a une transformation naturelle
$$f_! \to f_*$$
2. Cette transformation est une équivalence lorsque f est cohomologiquement propre.
3. f est cohomologiquement propre si et seulement si $f_!(\mathbf{1}_X) \to f_*(\mathbf{1}_X)$ est une équivalence.

Définition 2.5.3 (Morphisme cohomologiquement étale)

Un morphisme $f : X \to Y$ dans E est *cohomologiquement étale* lorsque

(i). f est n-tronqué pour un certain n;

(ii). $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f-lisse;

(iii). $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ est cohomologiquement étale (ou une équivalence).

Coïncidences

Définition 2.5.3 (Morphisme cohomologiquement étale)

Un morphisme $f : X \to Y$ dans E est *cohomologiquement étale* lorsque

(i). f est n-tronqué pour un certain n;

(ii). $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f-lisse;

(iii). $\Delta_f : X \to X \underset{Y}{\times} X$ est cohomologiquement étale (ou une équivalence).

Proposition 2.5.4

Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans E tel que Δ_f soit cohomologiquement étale.

1. Il y a une transformation naturelle

$$f^! \to f^*$$

2. Cette transformation est une équivalence lorsque f est cohomologiquement étale.
3. f est cohomologiquement étale si et seulement si $f^!(\mathbf{1}_Y) \to \mathbf{1}_X$ est une équivalence.

Faisceaux cohérents

Définition 3.1.1 (Schéma dérivé)

Un *schéma dérivé* est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux animés $\mathscr{O}_X$ tel que $(X, \pi_0\mathscr{O}_X)$ est un schéma et chaque $\pi_i\mathscr{O}_X$ est un $\pi_0\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Un *morphisme de schémas dérivés* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ accompagnée d'un morphisme de faisceaux $f^\sharp : f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y$ induisant un morphisme de schémas classiques.

Schémas dérivés

Définition 3.1.1 (Schéma dérivé)

Un *schéma dérivé* est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux animés $\mathscr{O}_X$ tel que $(X, \pi_0\mathscr{O}_X)$ est un schéma et chaque $\pi_i\mathscr{O}_X$ est un $\pi_0\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Un *morphisme de schémas dérivés* $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ accompagnée d'un morphisme de faisceaux $f^\sharp : f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y$ induisant un morphisme de schémas classiques.

Remarque

Un schéma dérivé est dit *affine* lorsque le schéma classique $(X, \pi_0\mathscr{O}_X)$ est affine.

Définition 3.1.2 (Module animé plat, morphisme d'anneaux plat)

Soit A un anneau animé. Un A-module M est *plat* lorsque $\pi_0(M)$ est un $\pi_0(A)$-module plat et que, pour tout n, le morphisme induit

$$\pi_0(M) \underset{\pi_0(A)}{\otimes} \pi_n(A) \to \pi_n(M)$$

est un isomorphisme.
Un morphisme d'anneaux animés $A \to B$ est *plat* lorsqu'il fait de B un A-module plat.

Définition 3.1.3 (Morphisme de schémas dérivés plat)

Un morphisme de schémas dérivés $f : X \to Y$ est *plat* lorsque, pour tout ouvert affine $U \subset X$ et $V = f(U) \subset Y$, le morphisme d'anneaux animés induit en sections globales $\Gamma(V) \to \Gamma(U)$ est plat.

Définition 3.1.3 (Morphisme de schémas dérivés plat)

Un morphisme de schémas dérivés $f : X \to Y$ est *plat* lorsque, pour tout ouvert affine $U \subset X$ et $V = f(U) \subset Y$, le morphisme d'anneaux animés induit en sections globales $\Gamma(V) \to \Gamma(U)$ est plat.

Définition 3.1.4 (Morphisme étale, lisse)

Un morphisme de schémas dérivés est

étale lorsqu'il est plat et induit un morphisme étale de schémas classiques;

lisse lorsqu'il est plat et induit un morphisme lisse de schémas classiques.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R, on note $\mathcal{D}(R)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\operatorname{Spec}(R)$.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R, on note $\mathcal{D}(R)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\mathrm{Spec}(R)$.

On note $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux *quasi-cohérents* sur X.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R, on note $\mathcal{D}(R)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\operatorname{Spec}(R)$.

On note $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux *quasi-cohérents* sur X.

Définition 3.1.6 (Faisceau pseudo-cohérent, cohérent)

Soit A un anneau animé. Un complexe $K \in \mathcal{D}(A)$ est

pseudo-cohérent lorsque, pour tout n, il existe un complexe parfait K_n et un morphisme $K_n \to K$ dont le cône est en degré supérieur à n;

cohérent lorsqu'il est pseudo-cohérent et borné.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R, on note $\mathcal{D}(R)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\operatorname{Spec}(R)$.

On note $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux *quasi-cohérents* sur X.

Définition 3.1.6 (Faisceau pseudo-cohérent, cohérent)

Soit A un anneau animé. Un complexe $K \in \mathcal{D}(A)$ est

pseudo-cohérent lorsque, pour tout n, il existe un complexe parfait K_n et un morphisme $K_n \to K$ dont le cône est en degré supérieur à n;

cohérent lorsqu'il est pseudo-cohérent et borné.

On note $\operatorname{Perf}(X)$ l'∞-catégorie des complexes parfaits de $\mathscr{O}_X$-modules.
On note $\operatorname{Coh}(X)$ l'∞-catégorie des complexes cohérents de $\mathscr{O}_X$-modules.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R, on note $\mathcal{D}(R)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\mathrm{Spec}(R)$.

On note $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ l'∞-catégorie dérivée des faisceaux *quasi-cohérents* sur X.

Définition 3.1.6 (Faisceau pseudo-cohérent, cohérent)

Soit A un anneau animé. Un complexe $K \in \mathcal{D}(A)$ est

pseudo-cohérent lorsque, pour tout n, il existe un complexe parfait K_n et un morphisme $K_n \to K$ dont le cône est en degré supérieur à n;

cohérent lorsqu'il est pseudo-cohérent et borné.

On note $\mathrm{Perf}(X)$ l'∞-catégorie des complexes parfaits de $\mathscr{O}_X$-modules.
On note $\mathrm{Coh}(X)$ l'∞-catégorie des complexes cohérents de $\mathscr{O}_X$-modules.

Remarque

$$\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X) = \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X))$$

Définition 3.1.7 (Schéma dérivé noethérien)

Un schéma dérivé X est *noethérien* lorsque le schéma classique $(X, \pi_0 \mathscr{O}_X)$ est noethérien et que $\pi_i \mathscr{O}_X$ est un $\pi_0 \mathscr{O}_X$-module cohérent pour tout i.

Définition 3.1.7 (Schéma dérivé noethérien)

Un schéma dérivé X est *noethérien* lorsque le schéma classique $(X, \pi_0\mathscr{O}_X)$ est noethérien et que $\pi_i\mathscr{O}_X$ est un $\pi_0\mathscr{O}_X$-module cohérent pour tout i.

Théorème 3.1.8

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un schéma dérivé cohérent. Alors $K \in \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ est pseudo-cohérent si et seulement si tous les $\pi_i K$ sont des $\pi_0\mathscr{O}_X$-modules cohérents.

Définition 3.1.7 (Schéma dérivé noethérien)

Un schéma dérivé X est *noethérien* lorsque le schéma classique $(X, \pi_0\mathscr{O}_X)$ est noethérien et que $\pi_i\mathscr{O}_X$ est un $\pi_0\mathscr{O}_X$-module cohérent pour tout i.

Théorème 3.1.8

Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un schéma dérivé cohérent. Alors $K \in \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$ est pseudo-cohérent si et seulement si tous les $\pi_i K$ sont des $\pi_0\mathscr{O}_X$-modules cohérents.

Remarque

En particulier, toute troncature de K est alors pseudo-cohérente.

Définition 3.1.9 (Morphisme presque de présentation finie)

Un morphisme d'anneaux animés $f : A \to B$ est *presque de présentation finie* lorsqu'il existe une factorisation

$$A \to A[X_1, \ldots, X_n] \to B$$

telle que B est un $A[X_1, \ldots, X_n]$-module pseudo-cohérent.

Définition 3.1.9 (Morphisme presque de présentation finie)

Un morphisme d'anneaux animés $f : A \to B$ est *presque de présentation finie* lorsqu'il existe une factorisation

$$A \to A[X_1, \ldots, X_n] \to B$$

telle que B est un $A[X_1, \ldots, X_n]$-module pseudo-cohérent.

Définition 3.1.10 (Morphisme propre)

Un morphisme de schémas dérivés est *propre* lorsqu'il est presque de présentation finie et qu'il induit un morphisme propres de schémas classiques.

Schémas dérivés

Définition 3.1.9 (Morphisme presque de présentation finie)

Un morphisme d'anneaux animés $f : A \to B$ est *presque de présentation finie* lorsqu'il existe une factorisation

$$A \to A[X_1, \ldots, X_n] \to B$$

telle que B est un $A[X_1, \ldots, X_n]$-module pseudo-cohérent.

Définition 3.1.10 (Morphisme propre)

Un morphisme de schémas dérivés est *propre* lorsqu'il est presque de présentation finie et qu'il induit un morphisme propres de schémas classiques.

Théorème 3.1.11

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas dérivés quasi-compacts et quasi-cohérents. Alors f^* préserve la pseudo-cohérence et la cohérence. De plus, lorsque f est de Tor-dimension finie, f^* préserve la perfection.

Proposition 3.2.1

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f^* admet un co-adjoint co-continu qui vérifie les formules de projections et de changement de base.

Proposition 3.2.1

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f^* admet un co-adjoint co-continu qui vérifie les formules de projections et de changement de base.

Proposition 3.2.2

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de Tor-dimension finie. Alors f^* admet un adjoint $f_\sharp$ vérifiant les formules de projection et de changement de base, donné par

$$\begin{array}{cccc} f_\sharp & : & \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X)) & \to & \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(Y)) \\ & & \mathrm{colim}_i\, P_i & \mapsto & \mathrm{colim}_i (f_*(P_i^\vee))^\vee \end{array}$$

Proposition 3.2.1

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f^* admet un co-adjoint co-continu qui vérifie les formules de projections et de changement de base.

Proposition 3.2.2

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de Tor-dimension finie. Alors f^* admet un adjoint $f_\sharp$ vérifiant les formules de projection et de changement de base, donné par

$$\begin{array}{cccll} f_\sharp & : & \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X)) & \to & \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(Y)) \\ & & \mathrm{colim}_i\, P_i & \mapsto & \mathrm{colim}_i (f_*(P_i^\vee))^\vee = \mathrm{colim}_i\, \mathcal{H}om(f_*\mathcal{H}om(P_i, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

Tout est propre

Théorème 3.2.3

Pour tout morphisme propre de Tor-dimension finie $f : X \to Y$, $\mathscr{O}_X$ est f-lisse.

Tout est propre

Théorème 3.2.3

Pour tout morphisme propre de Tor-dimension finie $f : X \to Y$, $\mathscr{O}_X$ est f-lisse.

Remarque

En particulier,

$$\omega_f \simeq \mathbb{D}_f(\mathscr{O}_Y)$$

Tout est propre

Théorème 3.2.3

Pour tout morphisme propre de Tor-dimension finie $f : X \to Y$, $\mathscr{O}_X$ est f-lisse.

Remarque

En particulier,

$$\omega_f \simeq \mathbb{D}_f(\mathscr{O}_Y)$$

Proposition 3.2.4

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et lisse de schémas dérivés. Alors f et Δ_f sont cohomologiquement lisses.
De plus, le dualisant de f est $\otimes$-inverse du dualisant de Δ_f, et est donc local sur X.

P immersions ouvertes, I propres et Tor-dimension finie

Théorème 3.2.5 (Compactification de Nagata dérivée)

Soit $f : X \to Y$ un morphisme presque de présentation finie entre schémas dérivés. Alors il existe une factorisation

$$X \overset{j}{\rightarrowtail} \overline{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

avec j une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre.

P immersions ouvertes, I propres et Tor-dimension finie

Théorème 3.2.5 (Compactification de Nagata dérivée)

Soit $f : X \to Y$ un morphisme presque de présentation finie entre schémas dérivés. Alors il existe une factorisation

$$X \overset{j}{\rightarrowtail} \overline{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

avec j une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre.

Proposition 3.2.6

Dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

où f est propre et de Tor-dimension finie et g est une immersion ouverte, le morphisme naturel

$$f_\sharp g'_* \to g_* f'_\sharp$$

est une équivalence.

Remplacer Ind(Perf) par Pro(Perf)

$$\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X) = \mathrm{Pro}(\mathrm{Perf}(X)) = \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X)^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$$

Remplacer Pro(Perf) par Pro(Coh)

Théorème 3.2.8

Le foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Pro}(\mathrm{Coh}(X))$$

s'étend en un formalisme à six foncteurs, avec I la classe des immersions ouvertes et P la classe des morphismes propres.

Remplacer Pro(Perf) par Pro(Coh)

Théorème 3.2.8

Le foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Pro}(\mathrm{Coh}(X))$$

s'étend en un formalisme à six foncteurs, avec I la classe des immersions ouvertes et P la classe des morphismes propres.

Proposition 3.2.9

Soit $f : X \to Y$ un morphisme séparé de schémas dérivés noethériens presque de type fini. Soit $K \in \mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Pro}(\mathrm{Coh}(X))$ de Tor-dimension finie sur Y. Alors K est f-lisse.

Remplacer Pro(Perf) par Pro(Coh)

Théorème 3.2.8

Le foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Pro}(\mathrm{Coh}(X))$$

s'étend en un formalisme à six foncteurs, avec I la classe des immersions ouvertes et P la classe des morphismes propres.

Proposition 3.2.9

Soit $f : X \to Y$ un morphisme séparé de schémas dérivés noethériens presque de type fini. Soit $K \in \mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Pro}(\mathrm{Coh}(X))$ de Tor-dimension finie sur Y. Alors K est f-lisse.

En particulier, si Y est un schéma classique régulier, alors tout $K \in \mathrm{Coh}(X)$ est f-lisse et $\mathrm{Coh}(X)$ est auto-dual par la dualité de Verdier

$$\mathbb{D}_f(K) = \mathcal{H}om(K, f^! \mathscr{O}_Y)$$

Remplacer Pro(Coh) par Ind(Coh)

$$X \mapsto \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$$

Remplacer Pro(Coh) par Ind(Coh)

$$X \mapsto \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$$

$$X \mapsto \mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X))$$

Remplacer Pro(Coh) par Ind(Coh)

$$X \mapsto \mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$$

$$X \mapsto \mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X))$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X) = \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X)) \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(X)^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X)^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X)) = \mathrm{IndCoh}(X)$$

Merci de votre attention

Bibliographie

- Peter Scholze, *Six-Functor Formalisms*, 2022
- Lucas Mann, *A p-Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry*, 2022
- Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*. Princeton, 2009.
- Jacob Lurie, *Higher Algebra*. Harvard, 2017.
- Kerodon et nLab.