

APPROCHE FONCTORIELLE DES SCHÉMAS

DAVID KOLAR

7 Avril 2026
Groupe de Travail "Déformations"

CONTENTS

1. Sites et Faisceaux	1
1.1. Faisceaux sur un espace topologique	1
1.2. Faisceaux sur un site	1
2. Les schémas sont des faisceaux	2
2.1. Topologie de Zariski	2
2.2. Quels faisceaux sont des schémas ?	2

1. SITES ET FAISCEAUX

1.1. Faisceaux sur un espace topologique.

Definition 1.1. Soit X un espace topologique. Un *pré-faisceau* (d'ensembles) \mathcal{F} sur X est la donnée:

- d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ pour tout ouvert U de X ;
 - d'un morphisme de *restriction* $\text{res}_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$;
- tel que
- pour tout ouvert U , $\text{res}_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
 - pour toutes inclusions d'ouverts $W \subseteq V \subseteq U$, $\text{res}_W^U = \text{res}_W^V \circ \text{res}_V^U$.

Definition 1.2. Un pré-faisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est un *faisceau* lorsque, pour tout ouvert U , tout recouvrement de U par des ouverts U_i et toute famille $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_i$ telle que

$$\text{res}_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \text{res}_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$$

il existe un unique élément $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que

$$\text{res}_{U_i}^U(s) = s_i$$

Exemples. • Le pré-faisceau $U \mapsto C(U, \mathbb{R})$ est un faisceau sur X ;

- Le pré-faisceau $U \mapsto C^b(U, \mathbb{R})$ n'est un faisceau que lorsque X est quasi-compact.

Remark. Soit $\mathbf{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de X , vus comme formant un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion. Un pré-faisceau sur X est équivalent à la donnée d'un foncteur $\mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

1.2. Faisceaux sur un site.

Definition 1.3. Soit C une catégorie admettant tous les produits fibrés¹. Une *pré-topologie* sur C est la donnée, pour tout objet $X \in C$ d'un ensemble $\text{Cov}(X)$, de *familles couvrantes* $\{X_i \rightarrow X\}_i$, tel que

- Pour tout $Y \rightarrow X$ et toute famille couvrante $\{X_i \rightarrow X\}_i$ de X , la famille $\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_i$ est couvrante.
- Pour toute famille couvrante $\{X_i \rightarrow X\}_i$ et toutes familles couvrantes $\{X_{ij} \rightarrow X_i\}_j$, la famille

$$\{X_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow X\}_{i,j}$$

est couvrante.

- Les isomorphismes sont couvrants.

Exemples. • La catégorie $\mathbf{Ouv}(X)$ des ouverts d'un espace topologique X est un site, avec comme familles couvrantes les familles conjointement surjectives.

¹Dénombrables ? Finis ?

- La catégorie **Top** des espaces topologiques est un site, avec comme familles couvrantes les familles conjointement surjectives d'immersions ouvertes.
- La catégorie **Sch** des schémas est un site, avec comme familles couvrantes les familles conjointement surjectives d'immersions ouvertes schématiques.

Definition 1.4. Soit C un site. Un pré-faisceau sur C est un *faisceau* lorsque, pour tout objet $X \in C$ et toute famille couvrante $\{X_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}(X)$, le diagramme

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(X_i \times_X X_j)$$

est un égalisateur.

Definition 1.5. Un site est *sous-canonique* lorsque les pré-faisceaux représentables h_X sont des faisceaux.

Definition 1.6. Un foncteur $u : C \rightarrow D$ entre sites est *continu* lorsque, pour tout faisceau \mathcal{F} sur D , le pré-faisceau $\mathcal{F} \circ u$ sur C est un faisceau.

Definition 1.7. Soient C une catégorie, D un site et $u : C \rightarrow D$ un foncteur. La *topologie induite* sur C est la plus fine rendant u continu.

Theorem 1.8 (Lemme de comparaison). Soient C une petite catégorie, D un site et $u : C \rightarrow D$ un foncteur pleinement fidèle. On munit C de la topologie induite. Si tout objet de D admet un recouvrement par des objets de C , alors les catégories de faisceaux sur D et C sont équivalentes, par $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \circ u$.

Definition 1.9. On dit alors que C est un sous-site dense de D .

2. LES SCHÉMAS SONT DES FAISCEAUX

2.1. Topologie de Zariski.

Definition 2.1. Un *recouvrement de Zariski* d'un schéma est une famille d'immersions ouvertes schématiques conjointement surjective.

Proposition 2.2. Les recouvrements de Zariski définissent une pré-topologie sur **Sch**.

Theorem 2.3. Soit $\text{Spec } A$ un schéma affine. Une famille de morphismes $\{\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A\}_i$ est un recouvrement de Zariski lorsque,

- (i) pour tout i , il existe un $r_i \in A$ tel que $A_i \simeq A[r_i^{-1}]$;
- (ii) pour tout i , le morphisme $\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A$ est formellement dual à la localisation $A \rightarrow A[r_i^{-1}]$;
- (iii) il existe une famille $\{f_i\}_i$ de A telle que

$$\sum_i f_i r_i = 1$$

Theorem 2.4 (Lemme de Yoneda). Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch} &\rightarrow \text{Fun}(\mathbf{Sch}^{\text{op}}, \mathbf{Set}) \\ X &\mapsto h_X := \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, X) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle.

Comme le site de Zariski sur **Sch** est sous-canonique, les schémas sont, par Yoneda, des faisceaux sur leur propre site. Par le Lemme de Comparaison (1.8), ce sont des faisceaux sur **Aff**.

2.2. Quels faisceaux sont des schémas ?

Definition 2.5. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux sur **Aff**. Un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une *immersion ouverte* lorsque, pour tout schéma affine X , la projection du produit fibré

$$h_X \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F} \rightarrow h_X$$

est donnée par une immersion ouverte de schémas affine.

Construction 2.6. Soit $\widetilde{\mathbf{Aff}}$ la catégorie des faisceaux sur le site de Zariski des schémas affine. On définit une pré-topologie sur $\widetilde{\mathbf{Aff}}$ en imposant qu'une famille de morphismes $\{\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}\}_i$ soit couvrante lorsqu'elle est composée d'immersions ouvertes et qu'elle est conjointement épimorphique.

Definition 2.7. Un faisceau \mathcal{F} sur **Aff** est *localement représentable* lorsqu'il existe un recouvrement $\{\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}\}_i$ tel que tout \mathcal{F}_i soit représentable.

Theorem 2.8. La catégorie des schémas est équivalente à la catégorie des faisceaux localement représentables sur **Aff**.