FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DAVID KOLAR
JOURNÉE DE RENTRÉE GS, 19 NOVEMBRE 2026

RÉSUMÉ. Un vieux problème en géométrie analytique est l'existence d'une bonne catégorie de faisceaux quasi-cohérents. En effet, la nature topologique des anneaux de fonctions nous force à imposer des conditions de finitude (i.e. de cohérence) aux modules que l'on voudrait recoller. La récente introduction par Clausen et Scholze des mathématiques condensées apporte une solution satisfaisante à ce problème, une fois les bons outils développés. Cet exposé propose une brève introduction aux mathématiques condensées, puis à la notion de modules solides quasi-cohérents sur un espace adique.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1
1. Mathématiques condensées 1
2. Modules solides 2
3. Faisceaux quasi-cohérents 3

« Algebraic geometry seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive, and very abstract, with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics. In one respect this last point is accurate. »

David Mumford
Curves and their Jacobians

INTRODUCTION

Aux commencements de la géométrie algébrique, les objets d'intéret étaient les variétés sur un corps algébriquement clos (idéalement de caractéristique 0). Progressivement, ces objets ont été généralisés pour ammener à la formidable théorie des schémas. D'une part, on n'est plus restreint à un corps de base, on peut considérer un schéma au dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et prendre des fibres en toute caractéristique. D'autre part, on n'impose plus aucune condition de finitude, ce qui mène à la théorie des faisceaux quasi-cohérents.
En géométrie analytique, cependant, on en est encore plus ou moins au stade des variétés sur un corps, avec les espaces complexes analytiques ou les variétés rigides. Certes, les espaces adiques de Huber permettent de travailler au dessus d'anneaux plus généraux, mais on est toujours contraint à la théorie des faisceaux cohérents. En effet, sans imposer de condition de finitude sur les modules, la topologie peut devenir très sauvage et empêcher le recollement. Le soucis vient principalement du fait que **TopAb** n'est pas abélienne, avec l'exemple prototypique $\mathbb{R}^\delta \xrightarrow{x\mapsto x} \mathbb{R}$, qui admet un noyau et un conoyau nul, mais n'est pas un homéomorphisme[1], et ultimement du fait que **Top** n'est pas un topos.

0. Certaines conditions émanant de la théorie des ensembles ont été omises ici, pour simplifier l'exposition, elles sont cependant essentielles pour la théorie « légère » présentée ici.
1. On peut même considérer n'importe quelle injection d'image dense, par exemple $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1. Mathématiques condensées

On cherche d'abord à remplacer **Top** par un topos. On constate alors que **CHaus** est un *pre*-topos.

Définition 1.1. Un *ensemble profini léger* est une limite séquentielle d'ensembles finis discrets.

Exemples.

— Tout ensemble fini est profini léger, en particulier le point $*$.

— Le compactifié d'Alexandrov $\overline{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ est profini léger.

— L'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est profini léger.

— Le compactifié de Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est profini, mais pas léger.

Construction. On muni **ProFin** de la topologie engendrée par les familles finies conjointement surjectives.

Définition 1.2. Un *ensemble condensé* est un faisceau d'ensembles sur le site des profinis légers.

Remarque. Un ensemble condensé est donc un foncteur $\mathscr{F} : \mathbf{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ tel que

(i) $\mathscr{F}(\varnothing) = *$;

(ii) $\mathscr{F}(S \sqcup S') = \mathscr{F}(S) \times \mathscr{F}(S')$;

(iii) Pour $T \twoheadrightarrow S$, $\mathscr{F}(S) = \mathrm{eq}\left(\mathscr{F}(T) \rightrightarrows \mathscr{F}(T \underset{S}{\times} T)\right)$.

Théorème 1.3. **Cond** *est un topos.*

Théorème 1.4. **CondAb** *est abélienne, et vérifie les axiomes AB6 et AB4* dénombrables.*

Proposition 1.5. *Pour $X \in$ **Top**,*

$$\begin{array}{rccc} \underline{X} & : & \mathbf{ProFin} & \to & \mathbf{Set} \\ & & S & \mapsto & C(S,X) \end{array}$$

est un ensemble condensé.

Proposition 1.6. *Le foncteur $\underline{(-)}$ admet un adjoint $-(*)$.*

On peut donc résoudre une partie du problème initial, on dispose maintenant d'un topos topologique, dans lequel il y a une suite exacte

$$0 \to \underline{\mathbb{R}^{\delta}} \to \underline{\mathbb{R}} \to Q \to 0$$

Avec $Q(*) = 0$ mais $Q(S) \neq 0$ pour tout autre profini léger S. Un problème reste encore, si l'on souhaite faire de la géométrie : le produit tensoriel ne calcule pas le bon anneau, par exemple, dans **CondAb**,

$$\mathbb{Z}[\![T]\!] \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}[\![U]\!] \neq \mathbb{Z}[\![T,U]\!]$$

Ce problème peut être résolu en introduisant une condition de complétude sur les modules condensés.

2. Modules solides

Proposition 2.1. *Le foncteur d'oubli* **CondAb** $\subset$ **Cond** *admet un adjoint*

$$X \mapsto \mathbb{Z} \cdot X := (S \mapsto \mathbb{Z} \cdot X(S))^{\sim}$$

Construction. On note $\mathrm{P} := \mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{N}}/\mathbb{Z} \cdot \infty$. Le décalage (injectif) sur $\overline{\mathbb{N}}$ induit un morphisme σ sur P.

Définition 2.2. Un groupe abélien condensé M est *solide* lorsque $(\mathrm{id} - \sigma)^*$ est un automorphisme de $\mathcal{H}om(\mathrm{P}, M)$.

1. Il faut probablement un hypothèse très minimale de séparation ici.

Remarque. Soit M un groupe abélien topologique. Alors $\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \underline{M})$ est le groupe abélien des suites de limite nulle dans M, et $(\mathrm{id} - \sigma)^*$ associe à une suite $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ la suite $(m_0 - m_1, m_1 - m_2, m_2 - m_3, \ldots)$. Imposer que ce soit un automorphisme revient à demander un inverse, qui doit donc envoyer une suite $(n_0, n_1, n_2, \ldots)$ sur $(\sum_{i\geq 0} n_i, \sum_{i\geq 1} n_i, \sum_{i\geq 2} n_i, \ldots)$. Ainsi, cela revient à imposer que les suites nulles soient sommables, ce qui est une caractérisation de la complétude non-archimédienne.

Théorème 2.3. *La sous-catégorie pleine des groupes abéliens solides est abélienne, vérifie l'axiome AB5, est stable par toutes les limites et colimites dénombrables dans* **CondAb**, *linéaire sur* **CondAb**, *admet un produit tensoriel, et l'inclusion admet un adjoint monoidal* $(-)^{\blacksquare}$. *Ces propriétés passent à la catégorie dérivée.*

Remarques. Cette théorie solide est exclusivement non-archimédienne, en effet :

— $\mathbb{R}^{\blacksquare} = 0$ et, pour tout $\underline{\mathbb{R}}$-module M, $M^{\blacksquare} = 0$.

— Pour tout $\underline{\mathbb{R}}$-module condensé M et tout groupe abélien solide N, $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$.

Théorème 2.4. *La catégorie* **Solid** *admet comme générateur compact projectif* $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$. *De plus*

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^{\blacksquare} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \simeq \prod_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

Remarque. Ainsi, $\mathbb{Z}[\![T]\!] \otimes^{\blacksquare} \mathbb{Z}[\![U]\!] \simeq \mathbb{Z}[\![T, U]\!]$.

3. Faisceaux quasi-cohérents

Théorème 3.1. *Soit X un espace spectral, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts quasi-compacts de X. Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie stable et, pour tout $U \in \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_U$ une sous-catégorie pleine stable et réfléchissante de $\mathcal{C}$, de refléxion notée L_U. On suppose*

(i) Pour tous $U, V \in \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_{U\cap V} = \mathcal{C}_U \cap \mathcal{C}_V$ et $L_{U\cap V} = L_U \circ L_V$.

(ii) Pour $U \in \mathcal{B}$, recouvert par des U_i. Si $M \in \mathcal{C}_U$ est tel que, pour tout i, $L_i(M) = 0$, alors $M = 0$.

Alors $U \mapsto \mathcal{C}_U$, avec les transitions envoyées sur des L_V, défini un faisceau d'∞-catégories sur X.

Définition 3.2. Soient R un anneau de Huber et $f \in R$. Un $\underline{R}$-module est f-solide lorsque $(\mathrm{id} - f\sigma)^*$ est un automorphisme de $\mathcal{H}om(P, M)$. Pour $S \subset R$, un R-module est S-solide lorqu'il est f-solide pour tout $f \in S$.

Remarques. — Pour poursuivre l'analogie des suites sommables, cela revient à imposer que, pour une suite de limite nulle $(m_0, m_1, \ldots)$, la somme $\sum_{n\geq 0} m_i f^i$ converge, donc que f est « de norme au plus 1 ».

— La S-solidité ne dépend que de la clôture intégrale de S dans R.

La remarque qui précède donne l'intuition que la bonne notion géométrique pour globaliser la notion de module solide est la théorie des espaces adiques de Huber[2].

Notation. Soit (A, A^+) une paire de Huber. On note $(A, A^+)_{\blacksquare}$ la catégorie des A-modules condensés solides en tout $f \in A^+$.

Théorème 3.3. *Soit X un espace adique. Le foncteur $X \supset \mathrm{Spa}(A, A^+) \mapsto \mathbf{D}((A, A^+)_{\blacksquare})$ est un faisceau sur X.*

Définition 3.4. En passant aux sections globales, on a donc une ∞-catégorie $\mathbf{D}_{\blacksquare}(X)$ de faisceaux solides quasi-cohérents sur X.

Théorème 3.5. *L'association $X \mapsto \mathbf{D}_{\blacksquare}(X)$ est un formalisme à six foncteurs.*

2. Dans la théorie légère, on saute complètement l'étape des espaces adiques, et on défini une catégorie de *champs analytiques*, dans laquelle les schémas, schémas formels, espaces adiques, variétés rigides, espaces de Berkovich... se plongent.