

UN PEU DE YOGA

DAVID KOLAR
SÉMINAIRE PAMPERS – 21 MAI 2026

RÉSUMÉ. Introduite dans les années 60 par Grothendieck, l'utilisation des six opérations (qu'il appelait yoga) cohomologiques a été très féconde dans l'étude de la cohomologie étale des schémas. Curieusement une véritable définition du yoga n'a été dégagée que très récemment par les travaux combinés de Gaitsgory-Rozenblyum, Liu-Zheng, Scholze, et Mann. Sans entrer dans des considérations trop techniques, j'essaierai de convaincre ceux qui veulent bien l'être de l'utilité d'un tel formalisme, et d'expliquer comment en concocter un pour sa théorie cohomologique favorite.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Formalisme abstrait	4

INTRODUCTION

Soit X un espace topologique « gentil » (par exemple localement compact de dimension finie). On veut étudier la cohomologie de X . Comme X peut tout de même être un peu subtil (par exemple l'ensemble de Cantor), on *doit* utiliser la cohomologie des faisceaux. On définit donc la catégorie $\mathbf{Ab}(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X , on y dispose d'un foncteur de sections globales

$$H^0(X, -) = \Gamma(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

qui est exact à gauche, donc admet des foncteurs dérivés à droite :

$$H^i(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

En appliquant ces foncteurs au faisceau constant \mathbb{Z} , on obtient les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathbb{Z})$. Si on veut avoir l'air savant, on commence à regarder le foncteur dérivé total de Γ :

$$\mathbf{R}\Gamma(X, -) : \mathbf{D}(\mathbf{Ab}(X)) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

En particulier, cela amène à étudier la catégorie dérivée $\mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) := \mathbf{D}(\mathbf{Ab}(X))$, et sa functorialité en X . Soit $f : X \rightarrow Y$, on dispose automatiquement d'un foncteur exact de *tiré en arrière*

$$f^* : \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$$

qui admet un co-adjoint

$$f_* : \mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z})$$

Lorsque $Y = *$, f^* est le foncteur de faisceau constant et f_* est le foncteur de cohomologie, en particulier

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z}) = f_* \mathbb{Z} = f_* f^* \mathbb{Z}$$

On peut alors voir f_* comme une « cohomologie relative » qui mélangerait la cohomologie de chaque fibre, ce qui est vrai lorsque f est propre (preserve les compacts par pré-image).

On peut alors formuler le théorème suivant :

Théorème (Changement de base propre). *Soit un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec f propre et $X' = X \times_Y Y'$. On a

$$g^* f_* \simeq f'_* g'^*$$

en tant que foncteurs $\mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(Y', \mathbb{Z})$. En particulier, pour $g : \{y\} \rightarrow Y$, on obtient

$$(f_* -)_y \simeq \mathbf{R}\Gamma(X_y, g^* -)$$

La cohomologie est une théorie très structurée :

Théorème (Künneth). *Pour X et Y propres, on a*

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z} \otimes \mathbf{R}\Gamma(Y, \mathbb{Z})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(X \times Y, \mathbb{Z})$$

Ici, \otimes est le produit tensoriel dérivé sur $\mathbf{D}(\mathbb{Z})$. Pour formuler ce théorème, on voit qu'il faut introduire un nouveau (bi)foncteur

$$- \otimes - : \mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \times \mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$$

pour tout X (c'est en fait le foncteur dérivé du produit tensoriel sur $\mathbf{Ab}(X)$), qui admet encore un co-adjoint

$$\mathcal{H}om(-, -) : \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})^{\text{op}} \times \mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$$

déterminé par l'adjonction

$$\mathbf{H}om(A, \mathcal{H}om(B, C)) \simeq \mathbf{H}om(A \otimes B, C)$$

Et ces deux foncteurs sont compatibles aux précédents : f^* est monoidal

$$f^*(A \otimes B) \simeq f^*A \otimes f^*B$$

Théorème (Formule de projection). *Pour $f : X \rightarrow Y$ propre, $A \in \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$ et $B \in \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z})$,*

$$f_*A \otimes B \simeq f_*(A \otimes f^*B)$$

Ces quatre foncteurs sont suffisants pour montrer la formule de Künneth :

Assertion. *Pour X et Y propres, $A \in \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$ et $B \in \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z})$, avec le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & \searrow p & \downarrow p_X \\ Y & \xrightarrow{p_Y} & * \end{array}$$

et $A \boxtimes B := p_1^*A \otimes p_2^*B \in \mathbf{D}(X \times Y, \mathbb{Z})$, on a

$$\mathbf{R}\Gamma(X, A) \otimes \mathbf{R}\Gamma(Y, B) \simeq \mathbf{R}\Gamma(X \times Y, A \boxtimes B)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma(X \times Y, A \boxtimes B) &= p_*(p_1^*A \otimes p_2^*B) \\ &= p_{X*}(p_{1*}(p_1^*A \otimes p_2^*B)) \\ &\simeq p_{X*}(A \otimes p_{1*}p_2^*B) \\ &\simeq p_{X*}(A \otimes p_X^*p_{Y*}B) \\ &\simeq p_{X*}A \otimes p_{Y*}B \\ &= \mathbf{R}\Gamma(X, A) \otimes \mathbf{R}\Gamma(Y, B) \end{aligned}$$

□

Enfin, une dernière structure essentielle en cohomologie :

Théorème (Dualité de Poincaré). *Soit X une variété comacte orientée de dimension d , alors*

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z})[d] \simeq \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbb{Z})^\vee$$

où $(-)^\vee$ désigne le dual $\mathcal{H}om(-, \mathbb{Z})$ dans $\mathbf{D}(\mathbb{Z})$.

On peut même faire un peu mieux, en prenant $A \in \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$, on a

$$\mathbf{R}\Gamma(X, A^\vee)[d] \simeq \mathbf{R}\Gamma(X, A)^\vee$$

Et on peut même faire varier \mathbb{Z} dans le dual : pour $B \in \mathbf{D}(\mathbb{Z})$, on a

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{H}om(A, f^*B))[d] \simeq \mathbf{H}om_{\mathbf{D}(\mathbb{Z})}(\mathbf{R}\Gamma(X, A), B)$$

Et on peut généraliser une dernière fois :

Théorème (Verdier). *Soit $f : X \rightarrow Y$ propre et, localement sur X et Y , un « fibré en variété » de dimension relative d , (i.e. de la forme $Y \times \mathbb{B}^d \rightarrow Y$). Alors f^* admet pour co-adjoint*

$$f^* - \otimes \omega_{X/Y}$$

Avec $\omega_{X/Y}$ localement isomorphe à $\mathbb{Z}[d]$.

Un problème immédiat ici est qu'on fait une hypothèse locale (de fibré en variété), et une hypothèse globale (de propreté), mais on peut contourner ce problème en introduisant un nouveau foncteur

$$f_! : \mathbf{D}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z})$$

qui est le dérivé du foncteur de sections à support propres. En particulier, on a une transformation $f_! \rightarrow f_*$ qui est un isomorphisme lorsque f est propre. Ce $f_!$ admet encore une fois un co-adjoint

$$f^! : \mathbf{D}(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{D}(X, \mathbb{Z})$$

qui nous permet de formuler correctement le théorème de Verdier

Théorème. *Soit $f : X \rightarrow Y$ comme plus haut, alors*

$$f^! - = f^* - \otimes \omega_{X/Y}$$

Avec $\omega_{X/Y} = f^!\mathbb{Z}$, localement isomorphe à $\mathbb{Z}[d]$.

FORMALISME ABSTRAIT

Définition. Un *contexte géométrique* est la donnée d'une catégorie \mathcal{C} d'objets géométriques et d'une classe de morphismes $E \subset \mathcal{C}$, tels que

- (i) \mathcal{C} admet toutes les limites finies;
- (ii) E est stable par composition et changement de base, et contient les isomorphismes.

Naïvement on pourrait décrire un formalisme à six foncteurs comme

- (1) Une association $X \mapsto \mathbf{D}(X)$, de \mathcal{C} en (∞) -catégories;
- (2) Pour tout X , une structure monoïdale symétrique \otimes sur $\mathbf{D}(X)$;
- (3) Pour tout $f : X \rightarrow Y$, un foncteur $f^* : \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}(X)$, monoïdal et compatible aux compositions : $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;
- (4) Pour tout $g : X \rightarrow Y$ dans E , un foncteur $f_! : \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$, compatible aux compositions, vérifiant les formules de projection et changement de base;
- (5) Des co-adjoints à tous ces foncteurs.

Décrire (1)-(3) revient à se donner un foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CMon}(\mathbf{Cat})$, et (5) est juste une condition.

Définition. Soit (\mathcal{C}, E) un contexte géométrique. La *catégorie des correspondances* de (\mathcal{C}, E) , notée $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ a

- pour objets ceux de \mathcal{C} ;
- pour morphismes les correspondances :

$$\text{Hom}(X, Y) = \left\{ \begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow & & \searrow E \\ X & & Y \end{array} \right\}$$

- pour composition les produits fibrés :

$$\left(\begin{array}{ccc} & W' & \\ \swarrow & & \searrow \\ Y & & Z \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow & & \searrow \\ X & & Y \end{array} \right) = \begin{array}{ccccc} & & W \times_Y W' & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & W & & W' & \\ \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

$\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ hérite d'une structure monoïdale symétrique définie sur \mathcal{C} par $\mathcal{C}^{\times'} = ((\mathcal{C}^{\text{op}})^{\sqcup})^{\text{op}}$.

Définition. Un *formalisme à trois foncteurs* est un foncteur (lax) monoïdal

$$\mathbf{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}$$

Cette définition encapsule :

- (i) Une association $X \mapsto \mathbf{D}(X)$;
- (ii) Pour tout X , une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{D}(X)$;
- (iii) Pour tout $f : X \rightarrow Y$, par la correspondance $Y \leftarrow X = X$, on obtient un foncteur $f^* : \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}(X)$, compatible aux compositions et monoïdal;
- (iv) Pour tout $g : X \rightarrow Y \in E$, par la correspondance $X = X \rightarrow Y$, on obtient un foncteur $f_! : \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$, compatible aux compositions.

En particulier, cette définition est suffisante pour montrer les deux théorèmes suivants :

Théorème. Soit $\mathbf{D} : \text{Corr}(C, E) \rightarrow \mathbf{Cat}$ un formalisme à trois foncteurs. Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y \in E$ et tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on a l'isomorphisme de foncteurs

$$g^* f_! \simeq f'_! g'^*$$

Démonstration. On considère les morphismes de $\text{Corr}(C, E)$ suivants :

$$h_1 = \begin{array}{ccc} & X & \\ \parallel & \searrow f & \\ X & & Y \end{array} \quad h_2 = \begin{array}{ccc} & Y' & \\ \swarrow g & \parallel & \\ Y & & Y' \end{array}$$

Alors la composition $h_2 \circ h_1$ est

$$h_2 \circ h_1 = \begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & \swarrow g' & \searrow f' & & \\ X & & & & Y' \\ \parallel & \searrow f & \swarrow g & \parallel & \\ X & & Y & & Y' \end{array} = \begin{array}{ccc} & X' & \\ \swarrow g' & & \searrow f' \\ X & & Y' \end{array}$$

En passant à \mathbf{D} , on obtient

$$f'_! g'^* = \mathbf{D}(h_2 \circ h_1) = \mathbf{D}(h_2) \circ \mathbf{D}(h_1) = g^* f_! \quad \square$$

Théorème. Soit $\mathbf{D} : \text{Corr}(C, E) \rightarrow \mathbf{Cat}$ un formalisme à trois foncteurs. Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y \in E$ et tout $A \in \mathbf{D}(X), B \in \mathbf{D}(Y)$,

$$f_! A \otimes B \simeq f_!(A \otimes f^* B)$$

Démonstration. On considère le carré

$$\begin{array}{ccc} (Y, X) & \xrightarrow{(id, f)} & (Y, Y) \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

avec

$$g_1 = \begin{array}{ccc} & X & \\ (f, id) \swarrow & \parallel & \\ (Y, X) & & X \end{array} \quad g_2 = \begin{array}{ccc} & Y & \\ (id, id) \swarrow & \parallel & \\ (Y, Y) & & Y \end{array}$$

Alors le carré commute et, en passant à \mathbf{D} , par la définition (technique et omise) de la structure monoïdale de $\text{Corr}(C, E)$, on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(Y) \times \mathbf{D}(X) & \xrightarrow{id \times f_!} & \mathbf{D}(Y) \times \mathbf{D}(Y) \\ f^*(-) \otimes - \downarrow & & \downarrow - \otimes - \\ \mathbf{D}(X) & \xrightarrow{f_!} & \mathbf{D}(Y) \end{array}$$

D'où

$$f_!(-) \otimes - \simeq f_!(f^* - \otimes -) \quad \square$$