INTRODUCTION AUX GROUPES ABÉLIENS SOLIDES

DAVID KOLAR
SÉMINAIRE PAMPERS - 24 AVRIL 2025

RÉSUMÉ. Dans *Curves and their Jacobians*, Mumford écrivait « Algebraic geometry seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive, and very abstract, with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics. In one respect this last point is accurate. ». Il faut cependant reconnaitre que, malgré de bons efforts, la conquête de l'analyse a, jusqu'à présent, été infructueuse. Le but de Clausen et Scholze avec leur récente théorie des champs analytiques est de lancer une nouvelle attaque. On en résume ici une brique fondamentale.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

— La catégorie des groupes abéliens topologiques n'est pas suffisamment sympathique pour l'algèbre homologique, par exemple le morphisme

$$\mathbb{R}^{\mathrm{disc}} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}$$

admet un noyau et un co-noyau nuls, mais n'est pas un homémomorphisme.
Le problème ici vient du fait que la topologie est une donnée de « second ordre », alors que la structure algébrique est de « premier ordre ».

— Il existe beaucoup de théories « concurrentes » de géométrie analytique :

  — Schémas formels ;
  — Espaces analytiques complexes ;
  — Espaces localement analytiques (Serre) ;
  — Espaces analytiques rigides (Tate) ;
  — Espaces de Berkovich ;
  — Espaces adiques (Huber) ;
  — ...

Et ces théorie disposent d'un réseau de comparaisons, mais ne prennent pas place dans une plus grande catégorie plus naturelle. De plus, aucune de ces théorie n'est aussi flexible que la théorie des schémas, notons en particulier l'absence de notion satisfaisante de faisceau quasi-cohérent.

1. Ensembles condensés

1.1. Sites et faisceaux.

Définition. Une *topologie* sur une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée, pour chaque objet X, d'une famille $\mathrm{Cov}(X)$ de familles de morphismes, appelées *recouvrements*, tel que

(i) « Les isomorphismes sont des recouvrements » :
$$\{Y \xrightarrow{\sim} X\} \in \mathrm{Cov}(X)$$

(ii) « Les recouvrements de recouvrements sont des recouvrements » : Pour $\{X_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}(X)$ et $\{X_{ij} \to X_i\}_j \in \mathrm{Cov}(X_i)$,
$$\{X_{ij} \to X\}_{i,j} \in \mathrm{Cov}(X)$$

(iii) « Les pré-images[1] de recouvrements sont des recouvrements » : Pour $Y \to X$ et $\{X_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}(X)$,
$$\{(Y \underset{X}{\times} X_i) \to X\}_i \in \mathrm{Cov}(Y)$$

Remarque. L'intersection de topologies sur une catégorie est encore une topologie. On peut ainsi définir la topologie engendrée par une collection de morphismes.

Définition. Un *site* est une catégorie munie d'une topologie.

Exemples.
- Si on pose $\mathcal{C}$ la catégorie des ouverts d'un espace topologique, les recouvrements topologiques sont des recouvrements catégoriques et font de $\mathcal{C}$ un site.
- La *topologie discrète* sur une catégorie admettant tous les produits fibrés est engendrée par toutes les familles de morphismes.
- La *topologie grossière* sur une catégorie admettant tous les produits fibrés est engendrée par les isomorphismes uniquement.
- Les familles conjointement surjectives d'immersions ouvertes définissent une topologie sur la catégorie des schémas : c'est la topologie de Zariski.

Définition. Un *faisceau*[2] sur un site $\mathcal{C}$ est un foncteur[3] $\mathscr{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ tel que, pour tout objet X et tout recouvrement $\{X_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}(X)$, on a
$$\mathscr{F}(X) \simeq \mathrm{eq}\left(\prod_i \mathscr{F}(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{F}(X_i \underset{X}{\times} X_j)\right)$$
Un morphisme de faisceaux est une transformation naturelle.

Remarque. Pour toute catégorie avec produits fibrés, il existe une topologie telle que tous les pré-faisceaux sont des faisceaux. Une telle topologie est dite *sous-canonique*. La plus fine topologie sous-canonique est appelée *topologie canonique*.

1.2. Ensembles profinis.

Définition. Un *ensemble profini* est une limite d'ensembles finis.

Théorème (Dualité de Stone)**.** *Les catégories suivantes sont équivalentes :*
- *La catégorie des ensembles profinis ;*
- *La catégorie opposée des algèbres de Boole ;*
- *La catégorie des espaces de Stone (compact séparés totalement discontinus).*

Définition. Un ensemble profini est dit *léger* lorsqu'il est limite dénombrable d'ensembles finis.

Remarque. De manière équivalente, un ensemble profini S est léger lorsque, sous dualité de Stone
$$|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Stone}}(S, \mathbb{F}_2)| < \omega$$
Les ensembles profinis léger sont équivalents aux espaces de Stone métrisables.

1. L'existence des produits fibrés est une condition supplémentaire implicite
2. d'ensembles
3. On parle aussi de pré-faisceau

Exemples. — Les ensembles finis sont profinis léger, en particulier le point $*$;

— Le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \infty$ est profini léger.

— L'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est profini léger.

— Le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$ est profini mais pas léger.

Proposition. *Les ensembles profinis légers sont projectifs dans la catégorie des ensembles profinis.*

Proposition. *Tout ensemble profini léger est quotient de l'ensemble de Cantor.*

1.3. **Ensembles condensés.** On muni la catégorie des ensembles profinis légers de la topologie engendrée par les familles finies conjointement surjectives et les épimorphismes.

Définition. Un *ensemble condensé* est un faisceaux d'ensembles sur le site des ensembles profinis légers.

Remarque. On peut reformuler un peu plus explicitement : un ensemble condensé est un foncteur $\mathscr{F} : \mathbf{ProFin}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ tel que

(1) $\mathscr{F}(\varnothing) = *$;
(2) Pour S_1 et S_2 des ensembles profinis légers, $\mathscr{F}(S_1 \sqcup S_2) = \mathscr{F}(S_1) \times \mathscr{F}(S_2)$;
(3) Pour $S' \twoheadrightarrow S$ un épimorphisme d'ensembles profinis légers,

$$\mathscr{F}(S) = \left\{ x \in \mathscr{F}(S') \mid p_1^*(x) = p_2^*(x) \right\}$$

avec p_1 et p_2 les projections $S' \underset{S}{\times} S' \rightrightarrows S$.

Proposition. *Soit X un espace topologique. On pose*

$$\begin{array}{rccc} \underline{X} & : & \mathbf{ProFin}^{\mathrm{op}} & \to & \mathbf{Set} \\ & & S & \mapsto & \mathcal{C}(S, X) \end{array}$$

Alors $\underline{X}$ est un ensemble condensé.

Remarque. Par plongement de Yoneda, on identifie un ensemble profini S et l'ensemble condensé $\underline{S} = よ(S)$.

Proposition. *Le foncteur $\underline{(-)}$ admet un adjoint, défini par*

$$X \mapsto X(*)_{\mathrm{top}} := \operatorname*{colim}_{\underline{S} \to X} S$$

Remarques. — L'espace sous-jacent de $X(*)_{\mathrm{top}}$ est $X(*)$.

— La topologie est donnée par

$$\bigsqcup_{\underline{S} \to X} S \to X(*)$$

— Par adjonction, pour $X \in \mathbf{Cond}$ et $Y \in \mathbf{Top}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X(*)_{\mathrm{top}}, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}}(X, \underline{Y})$$

1.4. **Ensembles condensés quasi-compacts et quasi-séparés.**

Définition. Un ensemble condensé X est *quasi-compact* lorsqu'il existe un ensemble profini S une surjection

$$\underline{S} \twoheadrightarrow X$$

Définition. Un ensemble condensé X est *quasi-séparé* lorsque, pour tous ensembles condensés quasi-compacts $Y, Z \to X$, le produit fibré

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est quasi-compact.

Théorème. *La catégorie des ensembles condensés quasi-compacts et quasi-séparés est équivalente à la catégorie des espaces topologiques compacts Hausdorffs métrisables.*

Remarque. Il est crucial d'utiliser les ensembles profinis légers pour obtenir ce résultat.

2. Groupes abéliens solides

2.1. Groupes abéliens condensés.

Définition. Un *objet groupe* dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec tous les produits est un objet G muni de quatres morphismes

$$e : 1 \to G \qquad p : G \to 1 \qquad m : G \times G \to G \qquad i : G \to G$$

tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id},e)"'] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id} \times m"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[d, "(i,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "e \circ p"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

Un objet groupe M est dit *abélien* lorsque, de plus, le diagramme suivant commute (avec σ l'échange de coordonnées)

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Notation. On note **AbCond** la catégorie des objets groupes abéliens de **Cond**, et **CondAb** la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur le site des ensembles profinis.

Théorème. **CondAb** $\simeq$ **AbCond**

Théorème. *La catégorie* **CondAb** *est abélienne, et vérifie les axiomes AB6 et AB4*.*

Remarque. Plus directement, **CondAb** a les mêmes propriétés que **Ab**.

Le foncteur de condensation s'applique également aux groupes abéliens topologiques, on obtient alors des groupes abéliens condensés. On peut donc répondre au premier problème de l'introduction, en considérant $\underline{\mathbb{R}^{\mathrm{disc}}} \to \underline{\mathbb{R}}$, on voit que, pour un ensemble profini S,

$$\underline{\mathbb{R}^{\mathrm{disc}}}(S) = \mathcal{C}(S, \mathbb{R}^{\mathrm{disc}}) = \left\{ \text{fonctions localement constantes sur } S \right\}$$
$$\underline{\mathbb{R}}(S) = \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$$

Ainsi,

$$Q = \underline{\mathbb{R}} / \underline{\mathbb{R}^{\mathrm{disc}}} \neq 0$$

On a donc une suite exacte

$$0 \to \underline{\mathbb{R}^{\mathrm{disc}}} \to \underline{\mathbb{R}} \to Q \to 0$$

Définition. Le *produit tensoriel* de deux groupes abéliens condensés M et N est la faisceautisation de

$$S \mapsto N(S) \otimes M(S)$$

Proposition. **CondAb** *est monoïdale fermée (i.e. le foncteur de produit tensoriel a pour ajoint le Hom interne).*

Théorème. *Le foncteur d'oubli* **CondAb** $\to$ **Cond** *admet un adjoint*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{Z}[-] & : & \mathbf{Cond} & \to & \mathbf{CondAb} \\ & & X & \mapsto & (S \mapsto \mathbb{Z}[X(S)]) \end{array}$$

Remarque. Par adjonction, pour $X \in$ **Cond** et $Y \in$ **CondAb**,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CondAb}}(\mathbb{Z}[X], Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cond}}(X, Y)$$

2.2. Un peu de cohomologie.

La catégorie des ensembles condensés (comme toute catégorie de faisceaux sur un petit site) forme un topos. On y dispose donc d'une théorie de cohomologie très naturelle.

Définition. Soit X un ensemble condensé. La *cohomologie condensée* de X à coefficients dans un groupe abélien M est

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cond}}(X, M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{CondAb}}(\mathbb{Z}[X], \underline{M})$$

Théorème. *Soit X un CW-complexe. Alors*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{sing}}(X, M) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{cond}}(\underline{X}, M)$$

On peut même faire un peu mieux :

Théorème. *Soit X un espace topologique compact Hausdorff métrisable. Alors*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{sheaf}}(X, M) \simeq \mathrm{H}^i_{\mathrm{cond}}(\underline{X}, M)$$

Remarque. Dans le cas des CW-complexes, on sait déjà que la cohomologie des faisceaux est identique à la cohomologie singulière.

2.3. **Groupes abéliens solides.** On en vient (enfin) au sujet précis de ce séminaire : les groupes abéliens solides. L'objectif dans cette dernière section est de dégager une catégorie de groupe abéliens condensés « complets ». Ceci est nécessaire car, dans la catégorie des groupes abéliens condensés, le produit tensoriel ne fait pas toujours ce qu'on aimerais, par exemple

$$\mathbb{Z}[\![T]\!] \otimes \mathbb{Z}[\![U]\!] \neq \mathbb{Z}[\![T, U]\!]$$

car le groupe abélien sous-jacent est encore le produit tensoriel algébrique.
On doit cependant faire un compromis important et abandonner le monde archimédien. La notion de complétude dans le monde non-archimédien est quelque peu différente : un groupe abélien est complet si et seulement si ses suites de limite nulle sont sommables.

Théorème. *Le groupe abélien condensé* $\mathrm{P} := \mathbb{Z}[\overline{\mathbb{N}}]/\mathbb{Z}[\infty]$ *est projectif et interieurement projectif.*

Remarque. Plus concrètement, les foncteurs Hom et Hom interne sortant de P préservent les épimorphismes.

L'application injective

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{s} & : & \overline{\mathbb{N}} & \to & \overline{\mathbb{N}} \\ & & n & \mapsto & n+1 \\ & & \infty & \mapsto & \infty \end{array}$$

Induit un endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} f := \mathrm{id} - \mathrm{s}^* & : & \mathrm{P} & \to & \mathrm{P} \\ & & [n] & \mapsto & [n] - [n+1] \end{array}$$

Définition. Un groupe abélien condensé M est *solide* lorsque f induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}om(\mathrm{P}, M) \overset{f^*}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{H}om(\mathrm{P}, M)$$

Remarque. On peut intuitivement voir $\mathcal{H}om(\mathrm{P}, M)$ comme le groupe abélien condensé des suites de limite nulle dans M. Le morphisme f^* associe à une telle suite $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ la suite $(m_0 - m_1, m_1 - m_2, m_2 - m_3, \ldots)$. En imposant que f^* soit un isomorphisme, on impose que son inverse associe à une suite $(m'_0, m'_1, m'_2, \ldots)$ la suite

$$(m'_0 + m'_1 + m'_2 + \ldots, m'_1 + m'_2 + m'_3 + \ldots, \ldots)$$

Cette suite devant être de limite nulle, cela revient à imposer que les suites de limites nulles soient sommables.

Théorème. — *La catégorie des groupes abéliens solides est stable par limites, colimites, Hom et Ext internes, et contient $\mathbb{Z}$.*
- — *L'inclusion* **Solid** $\subseteq$ **CondAb** *admet un adjoint* $M \mapsto M^{\blacksquare}$.
- — *La catégorie des groupes abéliens solides est munie d'une structure monoïdale symétrique par*

$$M \overset{\blacksquare}{\otimes} N := (M \otimes N)^{\blacksquare}$$

- — *Cette structure est l'unique telle que le foncteur de solidification soit monoïdal symétrique (i.e.* $M^{\blacksquare} \overset{\blacksquare}{\otimes} N^{\blacksquare} \simeq (M \otimes N)^{\blacksquare}$*).*

Théorème. $\mathbb{R}^{\blacksquare} = 0$ *et, pour tout groupe abélien condensé M admettant une structure de $\mathbb{R}$-module,* $M^{\blacksquare} = 0$.

Remarque. Encore plus fort, dans ce cas, pour tout groupe abélien solide N et tout i, $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$.

Théorème. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ *est un générateur projectif compact de la catégorie des groupes abéliens solides, et est plat pour* $\overset{\blacksquare}{\otimes}$.

Théorème. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \overset{\blacksquare}{\otimes} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \simeq \prod_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathbb{Z}$, *en d'autres termes* $\mathbb{Z}[\![T]\!] \otimes \mathbb{Z}[\![U]\!] \simeq \mathbb{Z}[\![T, U]\!]$.